

A. Písemka z lineární algebry I, leden 2000 – početní část
Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Vypočtete determinant matice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (2 body)

2. V \mathbb{R}^4 uvažujme rovinu $\rho : \alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(0, 1, 0, 0)$, přímku $p : (0, 0, 0, 1) + \gamma(0, 0, 1, 0)$ a bod $M = (1, 1, 1, 2)$. Najděte přímku q , která prochází bodem M a protíná rovinu ρ a přímku p . Slovy popište stručně postup a vypočtete. (3 body)

3. V \mathbb{R}^4 popište soustavou rovnic afinní podprostor $(1, 0, 0, 0) + \alpha(1, -1, 1, 0) + \beta(3, -2, 0, 1)$. (2 body)

4. V \mathbb{R}^4 zjistěte vzájemnou polohu roviny $\rho : x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, x_1 + x_3 + 2x_4 = 3$ a přímky $p : (3, -1, 0, 0) + \alpha(-3, 2, 1, 1)$. (3 body)

5. Najděte matici přechodu od standardní (kanonické) báze ε v \mathbb{R}^3 k bázi $\alpha = ((1, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 0, 0)^T)$. Pomocí této matice vypočtete souřadnice vektoru $u = (2, 3, 2)^T$ v bázi α . (2 body)

6. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2 + 2x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$.

a) Napište matici zobrazení f ve standardních bazích.

b) Najděte bázi $\text{Ker } f$.

c) Najděte bázi $\text{Im } f$. (3 body)

Teoretická část – pouze pro předmět M003

Max. počet bodů 15, do celkového hodnocení se započítává s váhou 2

1. Napište definici matice lineárního zobrazení $\varphi : U \rightarrow V$ v bazích α prostoru U a β prostoru V . (2 body)

2. Napište Laplaceův rozvoj determinantu matice A podle j -tého sloupce. (2 body)

3. Napište definici hodnoty matice A . (2 body)

4. Určete znaménko permutace $(n + 1, n + 2, \dots, 2n - 1, 2n, n, n - 1, \dots, 2, 1)$. (2 body)

5. Necht $f : U \rightarrow V$ je prosté lineární zobrazení a u_1, u_2, \dots, u_k jsou lineárně nezávislé vektory v U . Dokažte, že $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_k)$ jsou lineárně nezávislé ve V . (3 body)

6. V kterých \mathbb{R}^n lze nalézt dva mimoběžné afinní podprostory, z nichž jeden je dvourozměrný a druhý třírozměrný? (Uveďte definici mimoběžnosti.) (2 body)

7. Najděte soustavu rovnic nad \mathbb{R} s 2000 neznámými s množinou řešení

$$\{(1999t, t, t, \dots, t, t) \in \mathbb{R}^{2000}; t \in \mathbb{R}\}.$$

(2 body)

A. Řešení početní části

1. $(1 - a)^3$

2 body

2. Najdeme rovinu pM a spočítáme její průnik s rovinou ρ , bod Q . Hledaná přímka q je určena body M, Q (pokud není rovnoběžná s p .)

$$pM : (0, 0, 0, 1) + \gamma(0, 0, 1, 0) + \delta(1, 1, 1, 1)$$

Výpočet průniku $pM \cap \rho$ vede k soustavě s maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

a řešením $\delta = -1, \gamma = 1$.

$$Q = (-1, -1, 0, 0), \quad q : (1, 1, 1, 2) + t(2, 2, 1, 2).$$

3 body

3.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

2 body

4. Zjistíme, že $p \cap \rho = p$. Například tak, že parametrické vyjádření p dosadíme do rovnic ρ . Tedy $p \subset \rho$. 3 body

5.

$$(id)_{\varepsilon, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (id)_{\alpha, \varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1 bod

$$(u)_{\alpha} = (id)_{\alpha, \varepsilon}(u)_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

1 bod

6a.

$$(f)_{\varepsilon_4, \varepsilon_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Ker } f = [(1, 1, -1)], \quad \text{Im } f = [(1, 1, 0, 1), (-1, 1, 1, 0)]$$

1+1+1 bod

Řešení teoretické části

4. $(-1)^{n^2 + \frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{\frac{n(3n-1)}{2}}$.

2 body

6. $n \geq 5$.

2 body

7. $x_1 - 1999x_2 = 0, x_2 - x_3 = 0, x_3 - x_4 = 0, \dots, x_{1999} - x_{2000} = 0$.

2 body