Jméno: **login:** **Předmět:**

A. Písemka z lineární algebry I, leden 2002 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ má matice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ inverzní matici? Vypočtěte ji. (*2 body*)

2. V $\mathbb{R}^5$ popište soustavou rovnic afinní podprostor $(0,0,1,0,1) + \alpha(0,1,0,-1,1) + \beta(1,0,0,-2,3)$. (*2 body*)

3. V $\mathbb{R}^4$ uvažujme rovinu $\rho : (0,1,0,0) + \alpha(1,1,0,0) + \beta(1,0,1,0)$ a přímku $p : (0,0,0,1) + \gamma(0,0,-1,1)$. Najděte přímku q, která prochází počátkem $(0,0,0,0)$, protíná rovinu ρ a přímku p. Slovy popište stručně postup a vypočtěte. (*2 body*)

4. V $\mathbb{R}^4$ zjistěte vzájemnou polohu roviny $\rho : 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, x_1 - x_3 + x_4 = 3$ a přímky $p : (2,-1,0,3) + \alpha(1,4,2,1)$. (*2 body*)

5. Matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ v bázi $\alpha = (1, 1+x, x^2)$ je

$$(f)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte matici $(f)_{\beta,\beta}$ v bázi $\beta = (1, x, 1+x^2)$.

(*2 body*)

6. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4, 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4, x_2 + x_3 - x_4).$$

Najděte bázi $\operatorname{Ker} f$ a bázi $\operatorname{Im} f$. (*2 body*)

Teoretická část – pouze pro předmět M003

Max. počet bodů 8

1. Napište definici lineárního obalu vektorů $v_1, v_2, \dots, v_k$. (*1 bod*)

2. Napište Laplaceův rozvoj determinantu podle 2. řádku. (*1 bod*)

3. Napište matici přechodu od báze $\alpha = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ k bázi $\beta = (v_2, v_4, v_3, v_1)$. (*1 bod*)

4. Které z axiomů vektorového prostoru nejsou splněny pro množinu $V = \mathbb{R}$ a operace $a \odot x = a^2 x$ a $x \oplus y = x + y$? (*1 bod*)

5. V $\mathbb{R}^5$ uveďte jednoduchý příklad dvou afinních podprostorů dimenze 2 a 3, které jsou mimoběžné. Mimoběžnost dokažte. (*1 bod*)

6. Existují soustavy rovnic $Ax = b$ a $Ax = c$ o třech neznámých, z nichž prvá má právě jedno řešení a druhá jich má nekonečně mnoho? Své tvrzení dokažte. (*1 bod*)

7. Popište všechny afinní podprostory v $\mathbb{R}^3$. (*1 bod*)

8. Nechť $f : U \to V$ je lineární zobrazení a $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$. Jsou-li $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_k)$ lineárně nezávislé, pak $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou rovněž lineárně nezávislé. Dokažte. (*1 bod*)

Jméno: **login:** **Předmět:**

B. Písemka z lineární algebry I, leden 2002 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Pro které hodnoty parametru $b \in \mathbb{R}$ má matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b & b \\ 1 & b & b & b \end{pmatrix}$ inverzní matici? Vypočtěte ji. (*2 body*)

2. V $\mathbb{R}^5$ popište soustavou rovnic afinní podprostor $(0,1,-1,0,0)+\alpha(1,3,0,-2,0)+\beta(0,-1,0,1,-1)$. (*2 body*)

3. V $\mathbb{R}^4$ uvažujme rovinu $\rho : (0,0,1,0)+\alpha(0,0,1,1)+\beta(0,1,0,1)$ a přímku $p : (1,0,0,0)+\gamma(-1,1,0,0)$. Najděte přímku q, která prochází počátkem $(0,0,0,0)$, protíná rovinu ρ a přímku p. Slovy popište stručně postup a vypočtěte. (*2 body*)

4. V $\mathbb{R}^4$ zjistěte vzájemnou polohu roviny $\rho : 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, x_1 - x_3 + x_4 = 3$ a přímky $p : (2,-1,2,4) + \alpha(1,4,2,3)$. (*2 body*)

5. Matice lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ v bázi $\alpha = (1, x, x+x^2)$ je

$$(f)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte matici $(f)_{\beta,\beta}$ v bázi $\beta = (1, 1+x, x^2)$.

(*2 body*)

6. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+3x_2+2x_3+x_4, 4x_1+4x_2-4x_4, -x_1+x_3+2x_4, 2x_2+2x_3+2x_4).$$

Najděte bázi $\operatorname{Ker} f$ a bázi $\operatorname{Im} f$. (*2 body*)

Teoretická část – pouze pro předmět M003

Max. počet bodů 8

1. Napište definici součtu dvou podprostorů ve vektorovém prostoru U. (*1 bod*)

2. Napište Laplaceův rozvoj determinantu podle 3. sloupce. (*1 bod*)

3. Napište matici přechodu od báze $\alpha = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ k bázi $\beta = (v_3, v_1, v_4, v_2)$. (*1 bod*)

4. Které z axiomů vektorového prostoru nejsou splněny pro množinu $V = \mathbb{R}$ a operace $a \odot x = -ax$ a $x \oplus y = x + y$? (*1 bod*)

5. V $\mathbb{R}^5$ uveďte jednoduchý příklad dvou afinních podprostorů dimenze 3, které jsou mimoběžné. Mimoběžnost dokažte. (*1 bod*)

6. Nechť $f : U \to V$ je lineární zobrazení a $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$. Jsou-li $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)$ lineárně nezávislé, pak $u_1, u_2, \ldots, u_k$ jsou rovněž lineárně nezávislé. Dokažte. (*1 bod*)

7. Napište dvě vlastní podmnožiny $\mathbb{R}^3$, které jsou afinními podprostory a dvě, které jimi nejsou. (*1 bod*)

8. Existují soustavy rovnic $Ax = b$ a $Ax = c$ o třech neznámých, z nichž prvá nemá žádné řešení a druhá má právě jedno? Své tvrzení dokažte. (*1 bod*)