

Jméno a příjmení:

UČO:

Předmět:

D. Písemka z lineární algebry I, leden 2002 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Vypočtete součin $A \cdot B$ dvou matic tvaru $n \times n$, kde $A_{ij} = 1$ pro $i \geq j$ a $A_{ij} = 0$ pro $i < j$, $B_{ij} = 1$ pro $i \leq j$ a $B_{ij} = 0$ pro $i > j$. (2 body)

2. Pro které hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ soustava rovnic

$$\begin{aligned}x + y + az &= 1 \\x + ay + z &= 1 \\ax + y + a^2z &= b\end{aligned}$$

(i) nemá žádné řešení, (ii) má nekonečně mnoho řešení? V druhém případě všechna řešení najděte. (2 body)

3. V \mathbb{R}^4 uvažujme rovinu $\rho : (2, 8, 0, 1) + a(1, 0, -1, 1) + b(0, 1, -1, 0)$, přímku $p : (1, 7, -4, 1) + c(0, 0, 0, 1)$ a vektor $v = (1, 1, 1, 0)$. Najděte přímku q se směrovým vektorem v , která protíná přímku p a rovinu ρ . Slovy popište stručně postup a vypočtete. (2 body)

4. V \mathbb{R}^4 zjistěte vzájemnou polohu roviny $\rho : x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$, $x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10$ a přímky $p : (2, 0, 0, 2) + \alpha(2, 1, 0, 1)$. (2 body)

5. Matice přechodu od báze α k bázi β v \mathbb{R}^3 je

$$(id)_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte bázi α , je-li báze $\beta = ((1, 1, 0)^T, (1, 0, 0)^T, (0, 1, -1)^T)$. Transponování T znamená, že jde o sloupce. (2 body)

6. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ takové, že $f(1, 0, 0, 0) = (1, 2, 1, 0)$, $f(0, 1, 0, 0) = (0, 1, 3, 2)$, $f(1, 0, 1, 0) = (2, 5, 5, 2)$, $f(1, 0, 0, 1) = (2, 3, -1, -2)$. Najděte bázi $\text{Ker } f$ a bázi $\text{Im } f$. (2 body)

Teoretická část

Max. počet bodů 8

1. Napište pečlivě definici lineární nezávislosti vektorů u_1, u_2, \dots, u_k ve vektorovém prostoru U . (1 bod)

2. Napište definici hodnosti matice A . (1 bod)

3. Napište matici $(f)_{\beta, \alpha}$ lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$, $f(ax^2 + bx + c) = (a + b)x + (b - c)$ v bazích $\alpha = (x^2, x, 1)$ a $\beta = (x, 1)$. (1 bod)

4. Napište nějakou bázi vektorového prostoru reálných matic A tvaru 2×2 , pro které platí $A = A^T$. (1 bod)

5. Které všechny axiomy vektorového prostoru nad \mathbb{R} nejsou splněny pro množinu $V = \mathbb{R} - \{0\}$ a operace $a \odot x = ax$ a $x \oplus y = xy$? (1 bod)

6. Napište předpis pro nějaké lineární zobrazení $f : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ s jádrem $\text{Ker } f = \{2ax + a; a \in \mathbb{R}\}$. (1 bod)

7. Napište větu (Frobeniovu) dávající do souvislosti řešitelnost soustavy lineárních rovnic $Ax = b$ s hodnotami matice soustavy. (1 bod)

8. Nechť $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení a $\text{Ker } f = \{0\}$. Přímou z definice lineárního zobrazení a jádra dokažte, že f je prosté. (1 bod)

Jméno a příjmení:

UČO:

Předmět:

G. Písemka z lineární algebry I, leden 2002 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Vypočítejte součin $B \cdot A$ dvou matic tvaru $n \times n$, kde $A_{ij} = 1$ pro $i \geq j$ a $A_{ij} = 0$ pro $i < j$, $B_{ij} = 1$ pro $i \leq j$ a $B_{ij} = 0$ pro $i > j$. (2 body)

2. Pro které hodnoty parametrů $c, d \in \mathbb{R}$ soustava rovnic

$$\begin{aligned}x + z &= 1 \\x + y &= 1 \\x + cy - z &= d\end{aligned}$$

(i) nemá žádné řešení, (ii) má nekonečně mnoho řešení? V druhém případě všechna řešení najděte. (2 body)

3. V \mathbb{R}^4 uvažujme rovinu $\rho : (0, 1, 2, 8) + a(-1, 1, 1, 0) + b(-1, 0, 0, 1)$, přímku $p : (-4, 3, 1, 7) + c(0, 1, 0, 0)$ a vektor $v = (1, 0, 1, 1)$. Najděte přímku q se směrovým vektorem v , která protíná přímku p a rovinu ρ . Slovy popište stručně postup a vypočítejte. (2 body)

4. V \mathbb{R}^4 zjistěte vzájemnou polohu roviny $\rho : x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 6$, $-2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 = -2$ a přímky $p : (0, 2, 0, 7) + \alpha(2, 1, 0, 1)$. (2 body)

5. Matice přechodu od báze α k bázi β v \mathbb{R}^3 je

$$(id)_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte bázi α , je-li báze $\beta = ((1, 0, 1)^T, (1, -1, 0)^T, (0, 1, 0)^T)$. Transponování T znamená, že jde o sloupce. (2 body)

6. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ takové, že $f(1, 0, 0, 0) = (1, 2, -1, 0)$, $f(0, 1, 0, 0) = (0, 1, 1, 3)$, $f(0, 1, 1, 0) = (1, 2, -1, 0)$, $f(0, 1, 0, 1) = (1, 4, 1, 6)$. Najděte bázi $\text{Ker } f$ a bázi $\text{Im } f$. (2 body)

Teoretická část

Max. počet bodů 8

1. Napište pečlivě definici lineárního zobrazení $f : U \rightarrow V$. (1 bod)

2. Napište matici $(f)_{\beta, \alpha}$ lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, $f(ax + b) = (a + b)x^2 + 2bx - a$ v bazích $\alpha = (x, 1)$ a $\beta = (x^2, x, 1)$. (1 bod)

3. Napište definici lineární nezávislosti vektorů v_1, v_2, \dots, v_n v prostoru V . (1 bod)

4. Napište nějakou bázi vektorového prostoru reálných matic A tvaru 3×3 , pro které platí $A = -A^T$. (1 bod)

5. Které všechny axiomy vektorového prostoru nad \mathbb{R} nejsou splněny pro množinu $V = \mathbb{R}^2$ a operace $a \odot (x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$ a $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 2x_1 + 2y_2)$? (1 bod)

6. Napište předpis pro nějaké lineární zobrazení $f : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ s jádrem $\text{Ker } f = \{ax - 2a; a \in \mathbb{R}\}$. (1 bod)

7. Napište větu dávající do souvislosti dimenzi prostoru řešení soustavy lineárních rovnic $Ax = 0$ s hodnotami matice A . (1 bod)

8. Nechť $f : U \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Přímou z definice lineárního zobrazení a jádra dokažte, že $\text{Ker } f$ je vektorový podprostor. (1 bod)