Jméno a příjmení: **UČ0:** **Předmět:**

D. Písemka z lineární algebry I, leden 2002 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Vypočtěte součin $A \cdot B$ dvou matic tvaru $n \times n$, kde $A_{ij} = 1$ pro $i \geq j$ a $A_{ij} = 0$ pro $i < j$, $B_{ij} = 1$ pro $i \leq j$ a $B_{ij} = 0$ pro $i > j$. *(2 body)*

2. Pro které hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ soustava rovnic

$$\begin{aligned} x + y + az &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ ax + y + a^2 z &= b \end{aligned}$$

(i) nemá žádné řešení, (ii) má nekonečně mnoho řešení? V druhém případě všechna řešení najděte. *(2 body)*

3. V $\mathbb{R}^4$ uvažujme rovinu $\rho : (2, 8, 0, 1) + a(1, 0, -1, 1) + b(0, 1, -1, 0)$, přímku $p : (1, 7, -4, 1) + c(0, 0, 0, 1)$ a vektor $v = (1, 1, 1, 0)$. Najděte přímku q se směrovým vektorem v, která protíná přímku p a rovinu ρ. Slovy popište stručně postup a vypočtěte. *(2 body)*

4. V $\mathbb{R}^4$ zjistěte vzájemnou polohu roviny $\rho : x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$, $x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10$ a přímky $p : (2, 0, 0, 2) + \alpha(2, 1, 0, 1)$. *(2 body)*

5. Matice přechodu od báze α k bázi β v $\mathbb{R}^3$ je

$$(id)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte bázi α, je-li báze $\beta = ((1, 1, 0)^T, (1, 0, 0)^T, (0, 1, -1)^T)$. Transponování ^{T} znamená, že jde o sloupce. *(2 body)*

6. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ takové, že $f(1, 0, 0, 0) = (1, 2, 1, 0)$, $f(0, 1, 0, 0) = (0, 1, 3, 2)$, $f(1, 0, 1, 0) = (2, 5, 5, 2)$, $f(1, 0, 0, 1) = (2, 3, -1, -2)$. Najděte bázi $\operatorname{Ker} f$ a bázi $\operatorname{Im} f$. *(2 body)*

Teoretická část

Max. počet bodů 8

1. Napište pečlivě definici lineární nezávislosti vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_k$ ve vektorovém prostoru U. *(1 bod)*

2. Napište definici hodnosti matice A. *(1 bod)*

3. Napište matici $(f)_{\beta,\alpha}$ lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, $f(ax^2 + bx + c) = (a + b)x + (b - c)$ v bazích $\alpha = (x^2, x, 1)$ a $\beta = (x, 1)$. *(1 bod)*

4. Napište nějakou bázi vektorového prostoru reálných matic A tvaru 2×2, pro které platí $A = A^T$. *(1 bod)*

5. Které všechny axiomy vektorového prostoru nad $\mathbb{R}$ nejsou splněny pro množinu $V = \mathbb{R} - \{0\}$ a operace $a \odot x = ax$ a $x \oplus y = xy$? *(1 bod)*

6. Napište předpis pro nějaké lineární zobrazení $f : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ s jádrem $\operatorname{Ker} f = \{2ax + a; a \in \mathbb{R}\}$. *(1 bod)*

7. Napište větu (Frobeniovu) dávající do souvislosti řešitelnost soustavy lineárních rovnic $Ax = b$ s hodností matice soustavy. *(1 bod)*

8. Nechť $f : U \to V$ je lineární zobrazení a $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Přímo z definice lineárního zobrazení a jádra dokažte, že f je prosté. *(1 bod)*

Jméno a příjmení: **UČ0:** **Předmět:**

G. Písemka z lineární algebry I, leden 2002 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Vypočtěte součin $B \cdot A$ dvou matic tvaru $n \times n$, kde $A_{ij} = 1$ pro $i \geq j$ a $A_{ij} = 0$ pro $i < j$, $B_{ij} = 1$ pro $i \leq j$ a $B_{ij} = 0$ pro $i > j$. *(2 body)*

2. Pro které hodnoty parametrů $c, d \in \mathbb{R}$ soustava rovnic

$$\begin{aligned} x \quad\;\; + z &= 1 \\ x + y \quad\;\; &= 1 \\ x + cy - z &= d \end{aligned}$$

(i) nemá žádné řešení, (ii) má nekonečně mnoho řešení? V druhém případě všechna řešení najděte. *(2 body)*

3. V $\mathbb{R}^4$ uvažujme rovinu $\rho : (0,1,2,8) + a(-1,1,1,0) + b(-1,0,0,1)$, přímku $p : (-4,3,1,7) + c(0,1,0,0)$ a vektor $v = (1,0,1,1)$. Najděte přímku q se směrovým vektorem v, která protíná přímku p a rovinu ρ. Slovy popište stručně postup a vypočtěte. *(2 body)*

4. V $\mathbb{R}^4$ zjistěte vzájemnou polohu roviny $\rho : x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 6$, $-2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 = -2$ a přímky $p : (0,2,0,7) + \alpha(2,1,0,1)$. *(2 body)*

5. Matice přechodu od báze α k bázi β v $\mathbb{R}^3$ je

$$(id)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte bázi α, je-li báze $\beta = ((1,0,1)^T, (1,-1,0)^T, (0,1,0)^T)$. Transponování ^{T} znamená, že jde o sloupce. *(2 body)*

6. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ takové, že $f(1,0,0,0) = (1,2,-1,0)$, $f(0,1,0,0) = (0,1,1,3)$, $f(0,1,1,0) = (1,2,-1,0)$, $f(0,1,0,1) = (1,4,1,6)$. Najděte bázi $\operatorname{Ker} f$ a bázi $\operatorname{Im} f$. *(2 body)*

Teoretická část

Max. počet bodů 8

1. Napište pečlivě definici lineárního zobrazení $f : U \to V$. *(1 bod)*

2. Napište matici $(f)_{\beta,\alpha}$ lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $f(ax+b) = (a+b)x^2 + 2bx - a$ v bazích $\alpha = (x, 1)$ a $\beta = (x^2, x, 1)$. *(1 bod)*

3. Napište definici lineární nezávislosti vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_n$ v prostoru V. *(1 bod)*

4. Napište nějakou bázi vektorového prostoru reálných matic A tvaru 3×3, pro které platí $A = -A^T$. *(1 bod)*

5. Které všechny axiomy vektorového prostoru nad $\mathbb{R}$ nejsou splněny pro množinu $V = \mathbb{R}^2$ a operace $a \odot (x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$ a $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 2x_1 + 2y_2)$? *(1 bod)*

6. Napište předpis pro nějaké lineární zobrazení $f : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ s jádrem $\operatorname{Ker} f = \{ax - 2a; a \in \mathbb{R}\}$. *(1 bod)*

7. Napište větu dávající do souvislosti dimenzi prostoru řešení soustavy lineárních rovnic $Ax = 0$ s hodností matice A. *(1 bod)*

8. Nechť $f : U \to V$ je lineární zobrazení. Přímo z definice lineárního zobrazení a jádra dokažte, že $\operatorname{Ker} f$ je vektorový podprostor. *(1 bod)*