Řešené úlohy ke cvičení č. 11

Úloha 1. Nad $\mathbb{R}$ řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 &= -2,\\
2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 &= -1,\\
rx_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= -1,\\
3x_1 - x_2 + 3x_3 + rx_4 - x_5 &= -3.
\end{aligned}$$

Proveďte diskusi řešení v závislosti na hodnotě parametru $r \in \mathbb{R}$.

Řešení. Elementárními řádkovými úpravami převádíme rozšířenou matici soustavy nejprve na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & -2 & -2 & -1 & -2\\
2 & -1 & 2 & -1 & -2 & -1\\
r & -1 & 3 & 3 & 1 & -1\\
3 & -1 & 3 & r & -1 & -3
\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & -2 & -2 & -1 & -2\\
0 & -3 & 6 & 3 & 0 & 3\\
0 & -r-1 & 2r+3 & 2r+3 & r+1 & 2r-1\\
0 & -4 & 9 & r+6 & 2 & 3
\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & -2 & -2 & -1 & -2\\
0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 1 & r+2 & r+1 & r-2\\
0 & 0 & 1 & r+2 & 2 & -1
\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & -2 & -2 & -1 & -2\\
0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 1 & r+2 & r+1 & r-2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1-r & 1-r
\end{array}\right).$$

Dále pokračujeme převodem této rozšířené matice soustavy na Gauss-Jordanův tvar. Zde ale musíme rozlišit dva případy:

pro $\boldsymbol{r \neq 1}$:

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & r+2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2r+2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 2r+3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & r+2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2r+3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & r+2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

V tomto případě je partikulárním řešením dané soustavy například vektor $(0, -7, -3, 0, 1)$ a množinou všech řešení zhomogenizované soustavy je jednorozměrný podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$ generovaný například vektorem $(1, -2r-3, -r-2, 1, 0)$. Takže v tomto případě množinou všech řešení dané soustavy lineárních rovnic je lineární varieta v $\mathbb{R}^5$ tvaru

$$(0, -7, -3, 0, 1) + \langle(1, -2r-3, -r-2, 1, 0)\rangle,$$

jejíž zaměření je tedy závislé na hodnotě parametru $r \in \mathbb{R} - \{1\}$. Zbývá ještě vyřešit případ:

pro $\boldsymbol{r = 1}$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

V daném případě je partikulárním řešením této soustavy například vektor $(-1, -3, -1, 0, 0)$ a množinou všech řešení zhomogenizované soustavy je dvourozměrný podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$, jehož bázi tvoří například vektory $(1,-5,-3,1,0)$ a $(1,-4,-2,0,1)$. Dostáváme tak lineární varietu

$$(-1,-3,-1,0,0)+\langle(1,-5,-3,1,0),(1,-4,-2,0,1)\rangle$$

v $\mathbb{R}^5$, která je množinou všech řešení zadané soustavy lineárních rovnic v případě, kdy $r=1$.

Úloha 2. Nad $\mathbb{R}$ řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
x_1+3x_2+\ x_3+2x_4 &= 2,\\
x_1+4x_2-\ x_3+2x_4 &= 1,\\
x_1+2x_2+4x_3-tx_4 &= 2,\\
x_1+\ x_2-sx_3-tx_4 &= 3.
\end{aligned}$$

Proveďte diskusi řešení v závislosti na hodnotách parametrů $s,t\in\mathbb{R}$.

Řešení. Elementárními řádkovými úpravami opět převádíme rozšířenou matici soustavy nejprve na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 3 & 1 & 2 & 2\\
1 & 4 & -1 & 2 & 1\\
1 & 2 & 4 & -t & 2\\
1 & 1 & -s & -t & 3
\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 3 & 1 & 2 & 2\\
0 & 1 & -2 & 0 & -1\\
0 & -1 & 3 & -t-2 & 0\\
0 & -2 & -s-1 & -t-2 & 1
\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 3 & 1 & 2 & 2\\
0 & 1 & -2 & 0 & -1\\
0 & 0 & 1 & -t-2 & -1\\
0 & 0 & -s-5 & -t-2 & -1
\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 3 & 1 & 2 & 2\\
0 & 1 & -2 & 0 & -1\\
0 & 0 & 1 & -t-2 & -1\\
0 & 0 & 0 & (s+6)(t+2) & s+6
\end{array}\right).$$

Dále zase pokračujeme převodem rozšířené matice soustavy na Gauss-Jordanův tvar. Tady ale postupně rozlišíme následující případy:

pro $s \neq -6$, $t \neq -2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -t-2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & t+2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & \frac{2t+2}{t+2} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{t+2} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & \frac{2t+2}{t+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{t+2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5t+8}{t+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{t+2} \end{array}\right).$$

V tomto případě je tedy jediným řešením dané soustavy lineárních rovnic vektor

$$\left(\tfrac{5t+8}{t+2}, -1, 0, \tfrac{1}{t+2}\right)$$

prostoru $\mathbb{R}^4$ závislý na hodnotě parametru $t \in \mathbb{R} - \{-2\}$. Dále

pro $s \neq -6$, $t = -2$

je z předchozího schodovitého tvaru rozšířené matice soustavy vidět, porovnáme-li hodnosti matice soustavy a rozšířené matice soustavy, že tady soustava nemá řešení. Zbývá vyřešit případ:

pro $s = -6$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -t-2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & t+4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2t-4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -t-2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 7t+16 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -2t-4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -t-2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Tady ovšem obdobně jako v předchozí úloze obdržíme jednorozměrnou lineární varietu v $\mathbb{R}^4$ tvaru

$$(12, -3, -1, 0) + \langle(-7t - 16, 2t + 4, t + 2, 1)\rangle,$$

jejíž zaměření je závislé na hodnotě parametru $t \in \mathbb{R}$, která je množinou všech řešení dané soustavy v případě, kdy $s = -6$.