11. Euklidovské vektorové prostory

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

Abstrakt přednášky I

Při našich dosavadních úvahách o vektorových prostorech jsme pomocí operací sčítání vektorů a násobení čísla s vektorem vyšetřovali pojmy jako byla lineární závislost a nezávislost vektorů, generovatelnost, souřadnice vektoru, atd.

Prozatím jsme však neměli možnost ve vektorových prostorech „měřit“, tzn. zjišťovat a porovnávat délky vektorů, resp. odchylky (tj. velikosti úhlů), což jsou pojmy, které hrají podstatnou roli např. v geometrii.

Abstrakt přednášky II

Definice délky vektorů, resp. odchylky jsou založeny na pojmu **skalárního součinu**, který nyní zavedeme.

Omezíme se přitom však pouze na vektorové prostory nad tělesem reálných čísel.

Všude v dalším v této kapitole budeme vektorovým prostorem rozumět *reálný vektorový prostor*, tj. (konečnědimenzionální) vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ reálných čísel.

Obsah přednášky

- Euklidovský prostor

Obsah přednášky

- Euklidovský prostor
  - Skalární součin

Obsah přednášky

- Euklidovský prostor
  - Skalární součin
  - Norma a vzdálenost

Obsah přednášky

- Euklidovský prostor
  - Skalární součin
  - Norma a vzdálenost
  - Ortogonalita a ortonormalita

Obsah přednášky

- Euklidovský prostor
  - Skalární součin
  - Norma a vzdálenost
  - Ortogonalita a ortonormalita
  - Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

Obsah přednášky

- Euklidovský prostor
  - Skalární součin
  - Norma a vzdálenost
  - Ortogonalita a ortonormalita
  - Gram-Schmidtův ortogonalizační proces
  - Ortogonální doplněk

Obsah přednášky

- Euklidovský prostor
  - Skalární součin
  - Norma a vzdálenost
  - Ortogonalita a ortonormalita
  - Gram-Schmidtův ortogonalizační proces
  - Ortogonální doplněk
  - Ortogonální projekce

Euklidovské prostory I

11.1 Skalární součin

Nechť V je vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$) a nechť každé dvojici vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ je přiřazeno reálné číslo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ tak, že pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $r \in \mathbb{R}$ platí:

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$,
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$,
3. $(r \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = r \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
4. je-li $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, pak $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$.

Číslo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ se nazývá *skalární součin* vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Euklidovské prostory II

Vektorový prostor, v němž je definován skalární součin, se nazývá euklidovský vektorový prostor nebo krátce *euklidovský prostor*.

Euklidovské prostory II

Vektorový prostor, v němž je definován skalární součin, se nazývá euklidovský vektorový prostor nebo krátce *euklidovský prostor*.

Z definice plyne, že euklidovský prostor je vlastně uspořádaná dvojice $(V, \cdot)$ sestávající z vektorového prostoru V a ze skalárního součinu $\cdot$ definovaného ve V. Z důvodů stručnosti však budeme obvykle říkat pouze „euklidovský prostor V“.

Euklidovské prostory III

Každý podprostor vektorového prostoru V nad T je sám vektorovým prostorem nad T. Je-li specielně V euklidovským prostorem, tzn. je reálný s definovaným skalárním součinem, pak zřejmě axiomy skalárního součinu budou jistě splněny i v jeho libovolném (vektorovém) podprostoru.

To znamená, že každý (vektorový) podprostor euklidovského prostoru V je sám euklidovským prostorem. Budeme jej stručně nazývat *podprostor euklidovského prostoru*.

Euklidovské prostory III

Každý podprostor vektorového prostoru V nad T je sám vektorovým prostorem nad T. Je-li specielně V euklidovským prostorem, tzn. je reálný s definovaným skalárním součinem, pak zřejmě axiomy skalárního součinu budou jistě splněny i v jeho libovolném (vektorovém) podprostoru.

To znamená, že každý (vektorový) podprostor euklidovského prostoru V je sám euklidovským prostorem. Budeme jej stručně nazývat *podprostor euklidovského prostoru*.

Euklidovské prostory IV

Předchozí definice nic neříká o tom, zda v libovolném vektorovém prostoru (nad $\mathbb{R}$) lze definovat skalární součin, resp. kolika způsoby. Odpověď na tyto otázky nám dá následující příklad a věta.

Euklidovské prostory IV

Předchozí definice nic neříká o tom, zda v libovolném vektorovém prostoru (nad $\mathbb{R}$) lze definovat skalární součin, resp. kolika způsoby. Odpověď na tyto otázky nám dá následující příklad a věta.

Příklad 11.1.1 *Nechť* $V = \mathbb{R}^2$ *a nechť* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.
Položíme-li

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2,$$

jsou zřejmě splněny axiomy skalárního součinu a $\mathbb{R}^2$ s tímto skalárním součinem je euklidovským prostorem.

Euklidovské prostory IV

Předchozí definice nic neříká o tom, zda v libovolném vektorovém prostoru (nad $\mathbb{R}$) lze definovat skalární součin, resp. kolika způsoby. Odpověď na tyto otázky nám dá následující příklad a věta.

Příklad 11.1.1 *Nechť* $V = \mathbb{R}^2$ *a nechť* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.
Položíme-li

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2,$$

jsou zřejmě splněny axiomy skalárního součinu a $\mathbb{R}^2$ s tímto skalárním součinem je euklidovským prostorem.

Euklidovské prostory V

Položíme-li

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 3u_2v_2,$$

pak jsou opět splněny axiomy skalárního součinu, tzn. $\mathbb{R}^2$ s tímto skalárním součinem je euklidovským prostorem.

Euklidovské prostory V

Položíme-li

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 3u_2v_2,$$

pak jsou opět splněny axiomy skalárního součinu, tzn. $\mathbb{R}^2$ s tímto skalárním součinem je euklidovským prostorem.

Je vidět, že i když se v obou případech jedná o tentýž vektorový prostor $\mathbb{R}^2$, jsou definované skalární součiny různé, a tedy různé jsou pak i pomocí nich získané euklidovské prostory.

Euklidovské prostory VI

Příklad 11.1.2 *Nechť* $V = \mathbb{R}_n[x]$ *a nechť* $\mathbf{f} = f(x), \mathbf{g} = g(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ *jsou libovolné vektory – polynomy. Položíme-li*

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\,\mathbf{dx},$$

pak rozepsáním (užitím základních vět o integrování známých z analýzy) se ověří platnost axiomů skalárního součinu.

Tedy $\mathbb{R}_n[x]$ *s tímto skalárním součinem je euklidovský prostor.*

Euklidovské prostory VII

Věta 11.1.3 *V každém reálném vektorovém prostoru V lze definovat skalární součin.*

Euklidovské prostory VII

Věta 11.1.3 *V každém reálném vektorovém prostoru V lze definovat skalární součin.*

Můžeme tedy prohlásit, že z každého reálného vektorového prostoru lze utvořit euklidovský prostor, obecně však nikoliv jediným způsobem.

Euklidovské prostory VIII

Věta 11.1.4 *Nechť V je euklidovský vektorový prostor. Pak platí:*

1. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$,
2. $\mathbf{u} \cdot (r \cdot \mathbf{v}) = r \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
3. $\left(\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot \mathbf{u}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} r_j \cdot \mathbf{v}_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i r_j \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j)$,
4. $\mathbf{o} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{o} = 0$,
5. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}$

pro $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \in V$, $r, p_i, r_j \in \mathbb{R}$ *libovolná.*

Euklidovské prostory IX

Definice 11.1.5 *Nechť V je euklidovský prostor, $\mathbf{u} \in V$. Pak nezáporné reálné číslo:*

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

se nazývá délka nebo též velikost vektoru $\mathbf{u}$.

Euklidovské prostory IX

Definice 11.1.5 *Nechť V je euklidovský prostor, $\mathbf{u} \in V$. Pak nezáporné reálné číslo:*

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

se nazývá délka nebo též velikost vektoru $\mathbf{u}$*.*

Je-li $\|\mathbf{u}\| = 1$, pak říkáme, že *vektor* $\mathbf{u}$ *je normovaný*.

Euklidovské prostory X

Věta 11.1.6 ***(Schwarzova nerovnost)*** *Nechť* V *je euklidovský prostor,* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ *libovolné. Pak platí:*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|, \tag{1}$$

tzn. absolutní hodnota skalárního součinu dvou vektorů je menší nebo rovna součinu velikostí těchto vektorů.

Euklidovské prostory X

Věta 11.1.6 ***(Schwarzova nerovnost)*** *Nechť V je euklidovský prostor, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ libovolné. Pak platí:*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|, \tag{1}$$

tzn. absolutní hodnota skalárního součinu dvou vektorů je menší nebo rovna součinu velikostí těchto vektorů.

Ve Schwarzově nerovnosti (1) nastane rovnost, právě když vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé.

Euklidovské prostory XI

Schwarzovu nerovnost (1) často zapisujeme v ekvivalentním tvaru:

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq \|\,\mathbf{u}\,\|^2 \cdot \|\,\mathbf{v}\,\|^2.$$

Euklidovské prostory XI

Schwarzovu nerovnost (1) často zapisujeme v ekvivalentním tvaru:

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq \|\,\mathbf{u}\,\|^2 \cdot \|\,\mathbf{v}\,\|^2.$$

Poznamenejme ještě, že pro nerovnost (1) se v literatuře používá též pojmenování „Cauchyova nerovnost“, resp. „Cauchy-Bunjakovského nerovnost“, event. „Cauchy-Schwarzova nerovnost“.

Euklidovské prostory XII

Věta 11.1.7 *Nechť V je euklidovský prostor, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $r \in \mathbb{R}$. Pak platí:*

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, *přičemž* $\|\mathbf{u}\| = 0$, *právě když* $\mathbf{u} = \mathbf{o}$,
2. $\|r \cdot \mathbf{u}\| = |r| \cdot \|\mathbf{u}\|$,
3. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$,
4. *je-li* $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, *pak* $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \mathbf{u}$ *je normovaný vektor.*

Euklidovské prostory XII

Věta 11.1.7 *Nechť V je euklidovský prostor, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $r \in \mathbb{R}$. Pak platí:*

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, *přičemž* $\|\mathbf{u}\| = 0$, *právě když* $\mathbf{u} = \mathbf{o}$,
2. $\|r \cdot \mathbf{u}\| = |r| \cdot \|\mathbf{u}\|$,
3. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$,
4. *je-li* $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, *pak* $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \mathbf{u}$ *je normovaný vektor.*

Nerovnost uvedená ve 3. části věty se obvykle nazývá „trojúhelníková nerovnost“.

Euklidovské prostory XIII

Použijeme-li obratu provedeného ve 4. části věty (tzn. vektor $\mathbf{u}$ násobíme číslem $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}$), pak říkáme, že jsme vektor $\mathbf{u}$ „normovali“.

Euklidovské prostory XIII

Použijeme-li obratu provedeného ve 4. části věty (tzn. vektor $\mathbf{u}$ násobíme číslem $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}$), pak říkáme, že jsme vektor $\mathbf{u}$ „normovali“.

Definice 11.1.8 *Nechť* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *jsou* nenulové *vektory z euklidovského prostoru* V. *Pak reálné číslo* φ *splňující vztahy:*

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|} \quad \wedge \quad 0 \le \varphi \le \pi \tag{2}$$

se nazývá odchylka vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Euklidovské prostory XIV

Uvedená definice odchylky je korektní, tzn. že číslo φ splňující (2) existuje, a to jediné.

Euklidovské prostory XIV

Uvedená definice odchylky je korektní, tzn. že číslo φ splňující (2) existuje, a to jediné.

Schwarzovu nerovnost můžeme pro nenulové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ přepsat ve tvaru:

$$\frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|} \leq 1, \text{ tzn. } \left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|}\right| \leq 1, \text{ odkud}$$

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|} \leq 1.$$

Euklidovské prostory XIV

Uvedená definice odchylky je korektní, tzn. že číslo φ splňující (2) existuje, a to jediné.

Schwarzovu nerovnost můžeme pro nenulové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ přepsat ve tvaru:

$$\frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|} \leq 1, \text{ tzn. } \left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|}\right| \leq 1, \text{ odkud}$$

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|} \leq 1.$$

Odchylka vektorů není definována pro případ, kdy některý z těchto vektorů je nulovým vektorem.

Ortogonální podprostory I

11.2 Ortogonálnost

Definice 11.2.1 *Nechť V je euklidovský prostor a nechť:*

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \tag{3}$$

je konečná posloupnost vektorů z V. Řekneme, že:

- *posloupnost (3) je ortogonální (nebo stručně,* *že* vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou ortogonální*),* *jestliže je:*

  $$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0 \text{ pro každé } i, j = 1, \ldots, k \ \wedge \ i \neq j,$$

Ortogonální podprostory II

- *posloupnost (3) je* ***ortonormální*** *(nebo stručně, že* vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou **ortonormální***), je-li ortogonální a každý její vektor je normovaný,*

Ortogonální podprostory II

- *posloupnost (3) je* ***ortonormální*** *(nebo stručně, že* vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou **ortonormální**)*, je-li ortogonální a každý její vektor je normovaný,*

- *posloupnost 3 je* **ortogonální báze** *(resp.* **ortonormální báze***) euklidovského prostoru V, jestliže je ortogonální (resp. ortonormální) a navíc je bází prostoru V.*

Ortogonální podprostory III

Rozebereme-li si definici ortogonálnosti pro nejjednodušší případy, pak vidíme, že pro:

$k = 1$: Posloupnost sestávající z jednoho vektoru je vždy ortogonální (bez ohledu na to, zda např. daný vektor je nulový či nikoliv).

Ortogonální podprostory IV

$k = 2$: Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou ortogonální, právě když $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$. V tomto případě budeme psát $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$ nebo $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1$ (zřejmě zde nezáleží na pořadí vektorů). Dále, jsou-li oba vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ nenulové, pak zřejmě jsou ortogonální, právě když jejich odchylka je $\frac{\pi}{2}$ (plyne z definice odchylky). Na druhé straně, dva vektory, z nichž alespoň jeden je nulový, jsou vždycky ortogonální (přičemž jejich odchylka samozřejmě není definována).

Ortogonální podprostory V

Věta 11.2.2 *Nechť V je euklidovský prostor. Pak pro vektory z V platí:*

1. $\mathbf{u} \perp \mathbf{u} \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}$,
2. $\mathbf{u} \perp \mathbf{x}$ *pro každé* $\mathbf{x} \in V \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}$,
3. $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}_i$ *pro* $i = 1, \ldots, k \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp \left(\sum_{i=1}^{k} r_i \cdot \mathbf{w}_i\right)$

   pro každé $r_i \in \mathbb{R}$.

Ortogonální podprostory VI

Věta 11.2.3 *Nenulové ortogonální vektory euklidovského prostoru V jsou lineárně nezávislé.*

Ortogonální podprostory VI

Věta 11.2.3 *Nenulové ortogonální vektory euklidovského prostoru V jsou lineárně nezávislé.*

Poznamenejme, že předpoklad nenulovosti všech vektorů je v předchozí větě podstatný a bez něj věta neplatí. Jinak řečeno, jsou-li ortogonální vektory z V lineárně závislé, znamená to, že alespoň jeden z nich musí být nulový.

Ortogonální podprostory VII

Věta 11.2.4 *Nechť V je euklidovský prostor, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ libovolné. Pak existují ve V ortogonální vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$, které generují tentýž podprostor jako vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, tzn. platí:*

$$[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k] = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k].$$

$$\mathbf{e}_k = p_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + p_{k-1} \cdot \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{u}_k, \tag{4}$$

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i = 0 = p_i \cdot (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i) + (\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{e}_i),$$

$$p_i = \begin{cases} -\frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{e}_i}{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i} & \text{je-li } \mathbf{e}_i \neq \mathbf{o} \\ \text{libovolné} & \text{je-li } \mathbf{e}_i = \mathbf{o} \end{cases}$$

Ortogonální podprostory VII

- Důkaz předchozí věty byl konstruktivní a jeho algoritmus se nazývá *Gram-Schmidtův ortogonalizační proces* (používá se při řešení konkrétních příkladů!).

Ortogonální podprostory VII

- Důkaz předchozí věty byl konstruktivní a jeho algoritmus se nazývá *Gram-Schmidtův ortogonalizační proces* (používá se při řešení konkrétních příkladů!).
- V předchozí větě se nic nepředpokládá o lineární závislosti nebo nezávislosti vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$. Proto výsledné ortogonální vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ mohou, ale nemusí být všechny nenulové.

Ortogonální podprostory VIII

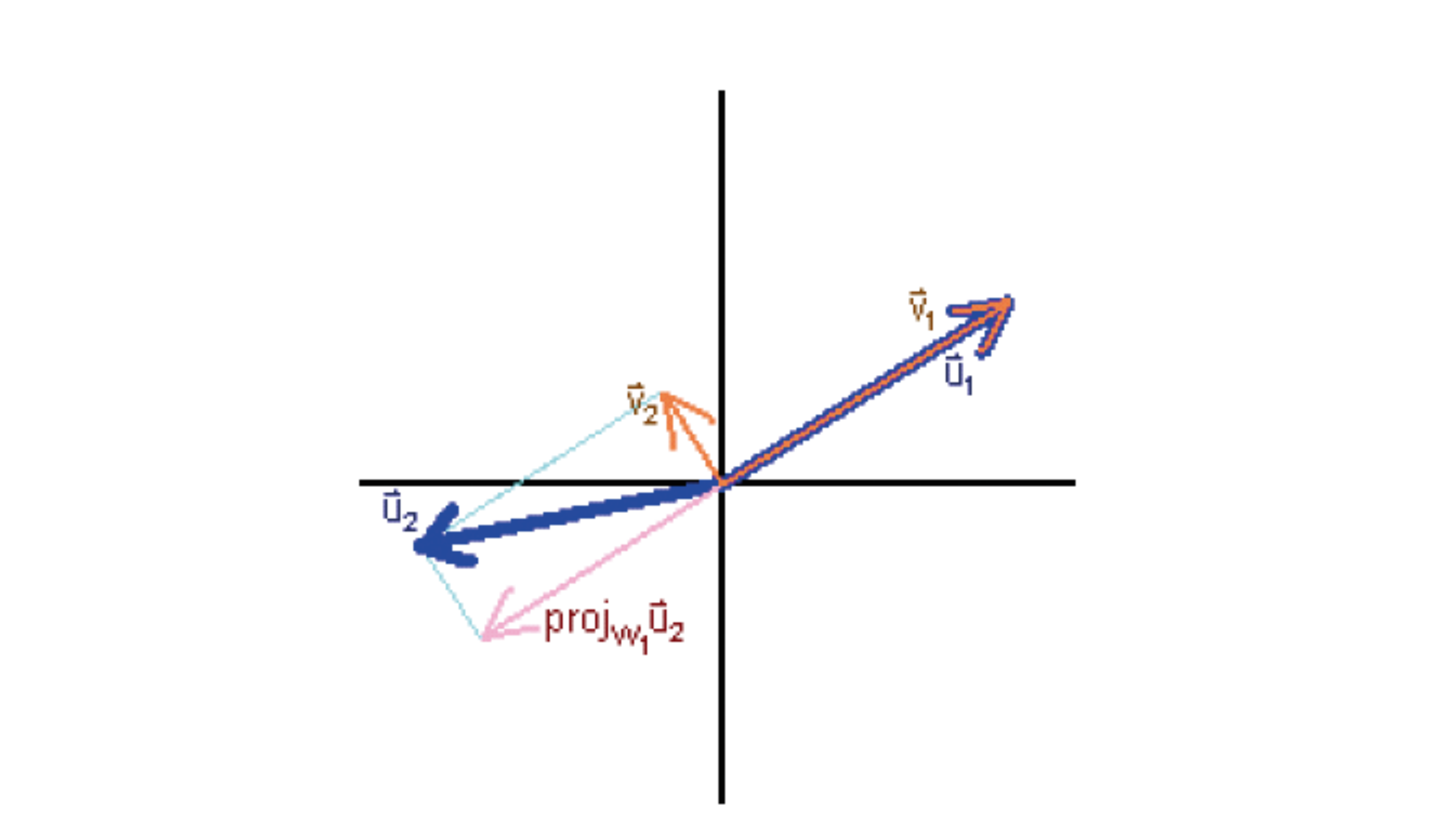
Přesněji řečeno, je-li $\dim[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k] = r$ ($\leq k$), pak tedy i $\dim[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k] = r$, což znamená, že právě $(k - r)$ z vektorů $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ je nulových a zbývajících r vektorů je nenulových a tvoří ortogonální bázi podprostoru $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k]$, tj. podprostoru generovaného vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Ortogonální podprostory VIII

Přesněji řečeno, je-li $\dim[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k] = r$ ($\leq k$), pak tedy i $\dim[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k] = r$, což znamená, že právě $(k - r)$ z vektorů $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ je nulových a zbývajících r vektorů je nenulových a tvoří ortogonální bázi podprostoru $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k]$, tj. podprostoru generovaného vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Speciálně tedy, jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně nezávislé, tzn. tvoří bázi podprostoru $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k]$, pak vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ tvoří ortogonální bázi tohoto podprostoru.

Ortogonální podprostory IX



Gram-Schmidtův algoritmus

Ortogonální podprostory X

Věta 11.2.5 *V každém nenulovém euklidovském prostoru* V *existuje ortogonální báze (resp. ortonormální báze).*

Ortogonální podprostory XI

Příklad 11.2.6 *V euklidovském prostoru* $\mathbb{R}^4$ *se skalárním součinem definovaným:*

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (y_1, y_2, y_3, y_4) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

nalezněte ortogonální bázi podprostoru W *generovaného vektory* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$*. Přitom:*

$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 2, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 1, 0)$.

Ortogonální podprostory XII

Řešení: Platí $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, tzn. použijeme Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu:

$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 = (0, 1, 2, 1)$.

Ortogonální podprostory XII

Řešení: Platí $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, tzn. použijeme Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu:
$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 = (0, 1, 2, 1)$.

$\mathbf{e}_2 = p \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_2$, kde $p = -\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1} = -\frac{2}{3}$. Tedy
$\mathbf{e}_2 = (-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Ortogonální podprostory XII

Řešení: Platí $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, tzn. použijeme Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu:

$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 = (0, 1, 2, 1)$.

$\mathbf{e}_2 = p \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_2$, kde $p = -\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1} = -\frac{2}{3}$. Tedy

$\mathbf{e}_2 = (-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

$\mathbf{e}_3 = p_1 \cdot \mathbf{e}_1 + p_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{u}_3$, kde $p_1 = -\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1} = -\frac{1}{3}$,
$p_2 = -\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2} = 1$. Tedy

$\mathbf{e}_3 = -\frac{1}{3} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{u}_3 = (0, 0, 0, 0) = \mathbf{o}$.

Ortogonální podprostory XII

Řešení: Platí $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, tzn. použijeme Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu:
$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 = (0, 1, 2, 1)$.

$\mathbf{e}_2 = p \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_2$, kde $p = -\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1} = -\frac{2}{3}$. Tedy
$\mathbf{e}_2 = (-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

$\mathbf{e}_3 = p_1 \cdot \mathbf{e}_1 + p_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{u}_3$, kde $p_1 = -\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1} = -\frac{1}{3}$,
$p_2 = -\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2} = 1$. Tedy
$\mathbf{e}_3 = -\frac{1}{3} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{u}_3 = (0, 0, 0, 0) = \mathbf{o}$.

Výsledek: ortogonální bázi podprostoru W tvoří např. vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

Ortogonální podprostory XIII

Definice 11.2.7 *Nechť A, B jsou libovolné podmnožiny euklidovského prostoru V. Je-li:*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \textit{pro každé } \mathbf{a} \in A,\ \mathbf{b} \in B,$$

pak říkáme, že A, B jsou **ortogonální množiny** *a píšeme $A \perp B$ nebo $B \perp A$.*

Ortogonální podprostory XIII

Definice 11.2.7 *Nechť A, B jsou libovolné podmnožiny euklidovského prostoru V. Je-li:*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \textit{pro každé } \mathbf{a} \in A,\ \mathbf{b} \in B,$$

pak říkáme, že A, B jsou **ortogonální množiny** *a píšeme $A \perp B$ nebo $B \perp A$.*

Jinak řečeno, A, B jsou ortogonální množiny, právě když $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou ortogonální vektory pro každé $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$.

Ortogonální podprostory XIII

Definice 11.2.7 *Nechť A, B jsou libovolné podmnožiny euklidovského prostoru V. Je-li:*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \ \text{ pro každé } \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B,$$

pak říkáme, že A, B jsou **ortogonální množiny** *a píšeme $A \perp B$ nebo $B \perp A$.*

Jinak řečeno, A, B jsou ortogonální množiny, právě když $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou ortogonální vektory pro každé $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$.

Ve speciálních případech: prázdná množina, resp. množina $\{\mathbf{o}\}$ jsou zřejmě ortogonální ke každé podmnožině ve V. Dále z definice plyne, že:

$$A \perp B \Longrightarrow A \cap B = \emptyset \text{ nebo } A \cap B = \{\mathbf{o}\}.$$

Ortogonální podprostory XIV

Věta 11.2.8 *Nechť A, B jsou podmnožiny euklidovského prostoru V. Pak platí:*

$$A \perp B \Leftrightarrow [A] \perp [B],$$

tzn. dvě množiny jsou ortogonální, právě když jsou ortogonální podprostory generované těmito množinami.

Ortogonální podprostory XV

Definice 11.2.9 *Nechť* W *je podmnožina (podprostor) euklidovského prostoru* V*. Pak množina:*

$$W^{\perp} = \{\mathbf{x} \in V : \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = 0 \text{ pro každé } \mathbf{w} \in W\}$$

se nazývá **ortogonální doplněk podmnožiny (podprostoru)** W *(ve* V*).*

Ortogonální podprostory XV

Definice 11.2.9 *Nechť W je podmnožina (podprostor) euklidovského prostoru V. Pak množina:*

$$W^{\perp} = \{\mathbf{x} \in V : \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = 0 \text{ pro každé } \mathbf{w} \in W\}$$

se nazývá **ortogonální doplněk podmnožiny (podprostoru)** *W (ve V).*

Zřejmě platí $W \perp W^{\perp}$ a ve speciálních případech přímo z definice dostáváme, že $V^{\perp} = \{\mathbf{o}\}$, resp. $\{\mathbf{o}\}^{\perp} = V$.

Ortogonální podprostory XVI

Věta 11.2.10 *Nechť W je podmnožina euklidovského prostoru V. Pak platí:*

1. *$W^\perp$ je podprostor ve V,*
2. *je-li W podprostor V, máme $V = W \dot{+} W^\perp$, tzn. prostor V je přímým součtem podprostorů W a $W^\perp$.*

Ortogonální podprostory XVII

Je-li W libovolný podprostor ve V, pak (podle 2. části předchozí věty a podle definice přímého součtu podprostorů) se libovolný vektor $\mathbf{u} \in V$ dá napsat, a to jediným způsobem, ve tvaru:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y},$$

kde $\mathbf{x} \in W$, $\mathbf{y} \in W^{\perp}$.

Ortogonální podprostory XVII

Je-li W libovolný podprostor ve V, pak (podle 2. části předchozí věty a podle definice přímého součtu podprostorů) se libovolný vektor $\mathbf{u} \in V$ dá napsat, a to jediným způsobem, ve tvaru:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y},$$

kde $\mathbf{x} \in W$, $\mathbf{y} \in W^{\perp}$.

Poznamenejme, že vektor $\mathbf{x}$ z tohoto vyjádření se nazývá ***ortogonální projekce vektoru*** $\mathbf{u}$ ***do podprostoru*** W.

Ortogonální podprostory XVIII

Věta 11.2.11 *Nechť W je podprostor euklidovského prostoru V, nechť $\mathbf{x}$ (resp. $\mathbf{x}'$) je ortogonální projekce vektoru $\mathbf{u}$ (resp. $\mathbf{u}'$) do podprostoru W a nechť $r \in \mathbb{R}$ libovolné. Pak platí:*

1. *$(\mathbf{x} + \mathbf{x}')$ je ortogonální projekce vektoru $(\mathbf{u} + \mathbf{u}')$ do W,*
2. *$r \cdot \mathbf{x}$ je ortogonální projekce vektoru $r \cdot \mathbf{u}$ do W.*

Ortogonální podprostory XIX

Věta 11.2.12 *Nechť W, S jsou podprostory euklidovského prostoru V. Pak platí:*

1. $(W^{\perp})^{\perp} = W$,
2. $(W + S)^{\perp} = W^{\perp} \cap S^{\perp}$,
3. $(W \cap S)^{\perp} = W^{\perp} + S^{\perp}$.