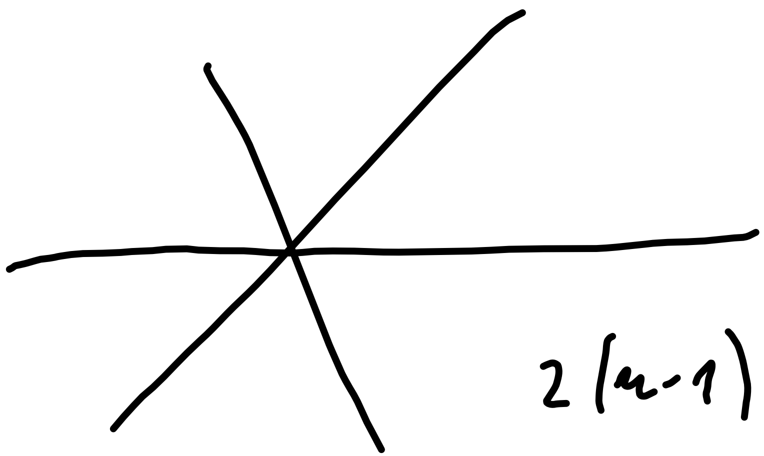
$$2S = \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \dots + \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} + \dots$$

$$\dots \binom{2n+1}{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1}$$

$$\Rightarrow S = 2^{2n} = 4^n$$

3)

nějaká rovina



$2(n-1)$ částí

$14! = p(14)$ permutace čtrnáctiprvkové

$14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ množiny

$8 \cdot 7 \cdot 6 = v(3,8) = (V(3,8))$

variace 3-tí třídy z osmi prvků.

1, vybereme čtveřici chlapců do čtyř párů:

$$\underline{\binom{10}{4}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = \frac{10!}{(10-4)!\,4!}$$

2) vybereme čtyři děvčata do čtyř párů:

$$\binom{8}{4}$$

Celkem máme podle pravidla součinu

$$\underbrace{\binom{10}{4} \cdot \binom{8}{4}}$$

dvojic čtveřic.

1.	4
2.	3
3.	2
4.	1

Dané dvě čtveřice mohu poskládat (4!) způsoby do čtyř párů. Celkem tedy můžeme vybrat $\binom{10}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot 4!$ párů.

Spočítáme postupně počet značek Morseovy abecedy délek 1, 2, 3 a 4:

$1: \ 2$

$2: \ 2 \cdot 2 = 4$

$3: \ 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$

$4: \ 2^4 = 16$

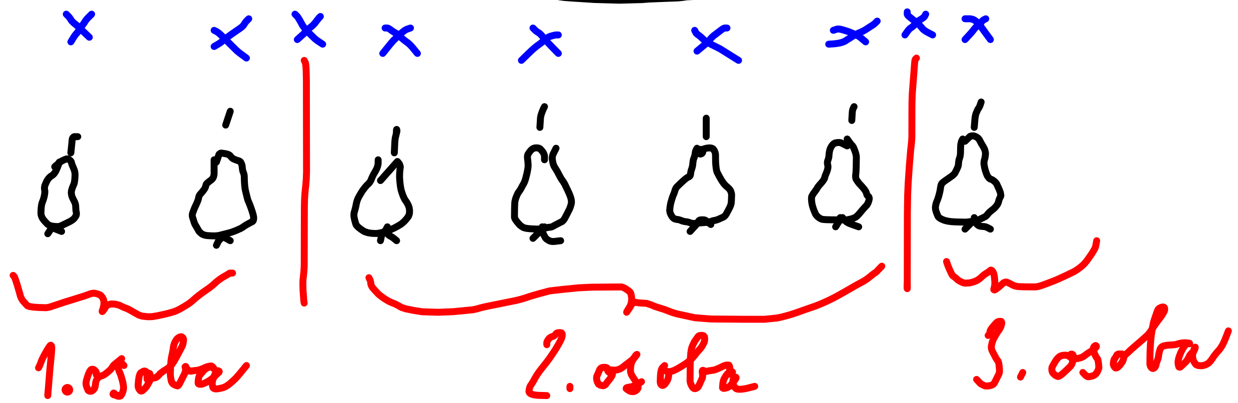
$V'(4,2) \qquad (V_0(4,2))$

Celkem máme 30 značek Mors. abecedy délky nejvýše 4.

Hledaný počet je dán permutacemi (pořadím) pěti prvků 1. druhu, pěti prvků 2. druhu a šesti prvků 3. druhu.

$$P(5,5,6) = \frac{16!}{5!\,5!\,6!}$$

a)



celkem 9. míst

$$\frac{9!}{2!\,7!} = P(2,7) = \binom{9}{2} = C(3,7)$$

Libovolná posloupnost dvou ~~přihrádek~~ oddělovačů a sedmi hrušek mě určuje právě jedno rozdělení sedmi hrušek mezi 3 osoby. Obráceně libovolné rozdělení 7 hrušek mezi 3 osoby mi ~~to~~ určuje posloupnost 2 ~~přihrádek~~ oddělovačů a 7 hrušek.

---

b) $\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{2}$

Pro $k \geq n$ je součet

$x_1 + x_2 + \dots + x_k \geq k \geq n$, tedy nerovnice nemá řešení.

Pro $n > k$: počet řešení dané nerovnice je roven počtu řešení rce

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} = n \quad \leftarrow \text{rozdíl } \underline{n - (x_1 + \dots + x_k)}$$

v přirozených číslech.

Libovolné řešení dané rovnice mohu zakódovat jako posloupnost n jedniček a k oddělovačů, přičemž mezi libovolnými dvěma oddělovači musí být alespoň jedna jednička:

$$\underbrace{1\,1}_{x_1}\,\Big|\,\underbrace{1\,1\,1}_{x_2}\,\Big|\,\underbrace{1}_{x_3}\,\Big|\,\cdots\,\Big|\,\underbrace{1\,1}_{x_k}\,\Big|\,\underbrace{1}_{x_{k+1}}$$

$$\cancel{|\,|\,1\,1\,|\,1\,|\,\cdots\,|\,1\,1\,|}$$

Daný počet posloupností vrátíme přidáváme $n-(k+1)$ jedniček do nezáporné k posloupnosti

$$1\,|\,1\,|\,1\,|\,\cdots\,|\,1\,|\,1 \qquad \binom{n-1}{n-(k+1)} = \binom{n-1}{k}$$

Tento počet odpovídá posloupnostem k oddělovačů a $n-(k+1)$ jedniček.

Stavový prostor $\Omega = \{(i,j) \mid 1 \le i \le 6, 1 \le j \le 6\}$,

$|\Omega| = 36$

$p(\text{padne součet šest}) = \dfrac{|\{(i,j) \mid 1 \le j,i \le 6,\ i+j=6\}|}{|\Omega|} = \dfrac{5}{36}$

Uvažujme ruletu s 37 čísly (18 červených, 18 černých a nula).

$p(\text{hráč vyhraje 1. sázku}) = \dfrac{18}{37}$

Spočítáme pravděpodobnost jevu opačného, tzv. jevu „hráč nevyhraje ani jednu sázku".

$$p(\text{nevyhraje nic}) = p(\text{„nevyhraje 1. sázku"} \wedge \ldots \wedge \text{„nevyhraje 4. s."}) =$$

$$= p(\text{nevyhraje 1.}) \cdot p(N\,2.) \cdot p(N\,3.) \cdot p(N\,4.) =$$

$$= \left(\frac{19}{37}\right)^4$$

Tedy

$$p(\text{vyhraje alespoň 1 sázku}) = 1 - \left(\frac{19}{37}\right)^4$$

a) $p = \frac{6}{16}$

b) $\Omega = \{$ posloupnosti 5 bílých, 5 červených a 6 černých koulí $\}$

$$|\Omega| = \frac{16!}{5!\,5!\,6!}$$

$A = \{$ příznivé jevy $\} = \{$ ty posloupnosti z Ω, ve kterých je na 5. místě černá koule $\}$

$$|A| = \frac{15!}{(5!)^3} \; ; \; p = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\frac{15!}{(5!)^3}}{\frac{16!}{(5!)^2 \cdot 6!}} = \frac{6}{16}$$

Opět spočítáme nejdříve pst. jevu opačného, tedy že někdo dostane svoji přenesenku zpět.

$$A_i = \text{ i-tý člověk dostane svoji přenesenku zpět.}$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_6) =$$

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_6) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \dots$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_6| = \sum_{i=1}^{6} |A_1| - \sum_{1 \le i < j \le 6} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < l \le 6} |A_i \cap A_j \cap A_l| +$$

$$|A_1 \cup \dots \cup A_6| = 6 \cdot 5! - \binom{6}{2} 4! + \binom{6}{3} 3! - \binom{6}{4} 2! + \binom{6}{5} - \binom{6}{6} = 6! - \frac{6!}{2!} + \frac{6!}{3!} - \frac{6!}{4!} + \frac{6!}{5!} - \frac{6!}{6!}$$

$$= 6! \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} \right)$$

$$|\Omega| = 6!$$

$$p(A_1 \cup \dots \cup A_6) = \frac{|A_1 \cup \dots \cup A_6|}{|\Omega|} = \left(1 - \frac{1}{2!} + \dots - \frac{1}{6!} \right)$$

p(nikdo nedostane svoji p. [illegible]) $= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$