

MB101 – 1. demonstrováná cvičení

Důkazy matematických tvrzení

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

20.2. 2007

- 1 Typy matematických důkazů
 - Matematická indukce
 - Důkaz sporem
- 2 Sumy
- 3 Počítání s procenty

Princip matematické indukce

Mějme tvrzení $T(n)$ závislé na přirozeném číslu n . Pokud dokážeme

- 1 Pro nějaké přirozené k_0 platí tvrzení $T(k_0)$,
- 2 Pro libovolné přirozené $k \geq k_0$ platí implikace $T(k) \Rightarrow T(k + 1)$,

pak tvrzení $T(n)$ platí pro libovolné přirozené $n \geq k_0$.

Princip matematické indukce

Mějme tvrzení $T(n)$ závislé na přirozeném číslu n . Pokud dokážeme

- 1 Pro nějaké přirozené k_0 platí tvrzení $T(k_0)$,
- 2 Pro libovolné přirozené $k \geq k_0$ platí implikace $T(k) \Rightarrow T(k + 1)$,

pak tvrzení $T(n)$ platí pro libovolné přirozené $n \geq k_0$.

Poznámka. V bodě dva můžeme dokazovat i „slabší“ implikaci $(T_{k_0} \wedge T_{k_0+1}) \wedge \cdots \wedge T_k \Rightarrow T(k + 1)$.

Dokažte následující tvrzení:

1

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$



Dokažte následující tvrzení:

1

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2 Na kolik částí dělí rovinu n přímek?

Dokažte následující tvrzení:

1

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- 2 Na kolik částí dělí rovinu n přímek?
- 3 Všechna přirozená čísla jsou si rovna.

Důkaz sporem

Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel.

- 1 Typy matematických důkazů
 - Matematická indukce
 - Důkaz sporem
- 2 Sumy
- 3 Počítání s procenty

Sumy

Aritmetická řada

$$\sum_{i=1}^n ik = k \frac{n(n+1)}{2}$$

Sumy

Aritmetická řada

$$\sum_{i=1}^n ik = k \frac{n(n+1)}{2}$$

Geometrická řada ($q \neq 0, 1$):

$$\sum_{i=0}^n q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

① Odvoďte přímo vztah $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

- 1 Odvoďte přímo vztah $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
- 2 Sečtěte

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

- 1 Typy matematických důkazů
 - Matematická indukce
 - Důkaz sporem
- 2 Sumy
- 3 **Počítání s procenty**

Příklad *Mirek si chce koupit nové auto. Auto stojí 300 000 Kč. Mirek by chtěl auto koupit na měsíční splátky. Prodávající společnost mu nabízí půjčku na koupi auta s ročním úrokem 6%. Mirek by chtěl auto splatit za tři roky. Jak vysoká bude měsíční splátka? (první splátku zaplatí hned při koupi)*