MB101 – 2. demonstrovaná cvičení
Motivační příklady

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

27.2. 2007

Plán přednášky

Příklad 1. *Kolik peněz naspořím na stavebním spoření za pět let, vkládám-li 3000 Kč měsíčně (vždy k 1. v měsíci), vklad je úročen roční úrokovou mírou* 3% *(úročení probíhá jednou za rok) a od státu obdržím ročně příspěvek* 1500 *Kč? (státní příspěvek se připisuje vždy až 1.května následujícího roku)*

Příklad 1. *Kolik peněz naspořím na stavebním spoření za pět let, vkládám-li 3000 Kč měsíčně (vždy k 1. v měsíci), vklad je úročen roční úrokovou mírou* 3% *(úročení probíhá jednou za rok) a od státu obdržím ročně příspěvek* 1500 *Kč? (státní příspěvek se připisuje vždy až 1.května následujícího roku)*

Řešení. Označme množství naspořených peněz po n-tém roce jako x_n. Potom dostáváme (pro $n > 2$) následující rekurentní formuli (navíc předpokládáme, že každý měsíc je přesně dvanáctina roku)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1,03(x_n) + 36000 + 1500 + 0,03 \cdot 3000 \left(1 + \frac{11}{12} + \cdots + \frac{1}{12}\right) \\ &\quad +0,03 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1500 = \\ &= 1,03(x_n) + 38115 \end{aligned}$$

Tedy

$$x_n = 38115 \sum_{i=0}^{n-2} (1,03)^i + (1,03)^{n-1} x_1 + 1500,$$

přičemž $x_1 = 36000 + 3000\left(1 + \frac{11}{12} + \cdots + \frac{1}{12}\right) = 36585$, celkem

Příklad 2. *Na kolik nejvýše částí dělí rovinu n kružnic?*

Řešení. Pro počet x_n, na který nejvýše dělí rovinu n kružnic odvodíme rekurentní vztah

$$x_n = x_{n-1} + 2(n-1).$$

Tedy

$$x_n = 2(\sum_{i=1}^{n-1}) + x_1 = n(n-1) + 2.$$

□

Příklad 3. *Odvoďte vzorec pro součet*

$$\sum_{i=1}^{n} i^4$$

Řešení.

$$S_4(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

$\square$

Plán přednášky

Na kolik nejvýše částí dělí třírozměrný Eukleidovský prostor n rovin?

Na kolik nejvýše částí dělí třírozměrný Eukleidovský prostor n rovin?

Příklad *Zjednodušený model chování národního produktu.*

$$y_{k+2} - a(1+b)y_{k+1} + aby_k = 1,$$

kde y_k *je národní produkt v roce* k, *konstanta* a *je takzvaný mezní sklon ke spotřebě, což je makroekonomický ukazatel, který udává jaký zlomek peněz, které mají obyvatelé k dispozici, utratí a konstanta* b *popisuje jak závisí míra investic soukromého sektoru na mezním sklonu ke spotřebě.*
Předpokládáme dále, že velikost národního produktru je normována tak, aby na pravé straně rovnice vyšlo číslo 1.
Spočítejte konkrétní hodnoty pro $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{3}$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$.

Binomická věta

Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, pak

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Binomická věta

Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, pak

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Sečtěte

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

Binomická věta

Buď $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, pak

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Sečtěte

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

Sečtěte

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{i}$$

Určete součet koeficientů mnohočlenu

$$P(x) = (1 + x^2 - x^3)^{1000}.$$