Drsná matematika I – Demonstrované cvičení 10. Báze, souřadnice, lineární zobrazení

Jaroslav Hrdina

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

24. 4. 2007

Obsah cvičení

Plán cvičení

Vektorový prostor

Dokažte, že prostor $\mathbb{R}_2[x]$ všech reálných polynomů stupně nejvýše 2 (se standardními operacemi) tvoří vektorový prostor. Dokažte, že množina $\{f \in \mathbb{R}_2[x] \mid -f(x) = f(-x)\}$ všech lichých polynomů tvoří jeho podprostor.

Vektorový podprostor

V prostoru $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ reálných čtvercových matic řádu 2:

1. Rozhodněte, zda množina $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b+c+d=0 \right\}$ tvoří jeho podprostor.
2. Rozhodněte, zda vektor $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ náleží do $\left[\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right]$.

Přímý součet

Necht' S, T jsou podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.
Rozhodněte, zda je součet $S + T$ přímý:
$S = \{(x, y, z)^T \mid x + y = 0\}$, $T = \{(x, y, z)^T \mid x + z = 0\}$

Plán cvičení

Báze

Definition

Podmnožina $M \subset V$ se nazývá báze vektorového prostoru V jestliže $\langle M \rangle = V$ a M je lineárně nezávislá.

Báze

Definition

Podmnožina $M \subset V$ se nazývá báze vektorového prostoru V jestliže $\langle M \rangle = V$ a M je lineárně nezávislá.

Ověřte, zda následující množiny vektorů z $\mathbb{R}_2[x]$ jsou nebo nejsou bází $\mathbb{R}_2[x]$

Báze

Definition

Podmnožina $M \subset V$ se nazývá báze vektorového prostoru V jestliže $\langle M \rangle = V$ a M je lineárně nezávislá.

Ověřte, zda následující množiny vektorů z $\mathbb{R}_2[x]$ jsou nebo nejsou bází $\mathbb{R}_2[x]$

- $M = \{1, x, x^2\}$.

Báze

Definition

Podmnožina $M \subset V$ se nazývá báze vektorového prostoru V jestliže $\langle M \rangle = V$ a M je lineárně nezávislá.

Ověřte, zda následující množiny vektorů z $\mathbb{R}_2[x]$ jsou nebo nejsou bází $\mathbb{R}_2[x]$

- $M = \{1, x, x^2\}$.
- $M = \{1 + x, x + x^2, x^2\}$.

Báze

Definition

Podmnožina $M \subset V$ se nazývá báze vektorového prostoru V jestliže $\langle M \rangle = V$ a M je lineárně nezávislá.

Ověřte, zda následující množiny vektorů z $\mathbb{R}_2[x]$ jsou nebo nejsou bází $\mathbb{R}_2[x]$

- $M = \{1, x, x^2\}$.
- $M = \{1 + x, x + x^2, x^2\}$.
- $M = \{1 + x, x, 1\}$.

Báze

Definition

Podmnožina $M \subset V$ se nazývá báze vektorového prostoru V jestliže $\langle M \rangle = V$ a M je lineárně nezávislá.

Ověřte, zda následující množiny vektorů z $\mathbb{R}_2[x]$ jsou nebo nejsou bází $\mathbb{R}_2[x]$

- $M = \{1, x, x^2\}$.
- $M = \{1 + x, x + x^2, x^2\}$.
- $M = \{1 + x, x, 1\}$.
- $M = \{1 + x, x, x + x^2, x^2\}$.

Souřadnice vektorů

Definition

Když je množina $\{v_1, \ldots, x_n\} \subset V$ báze, můžeme každý vektor $v \in V$ vyjádřit jednoznačně jako lineární kombinaci $v = a_1 v_1 + \cdots a_n v_n$. Koeficienty této jediné lineární kombinace vyjadřující daný vektor $v \in V$ ve zvolené bázi se nazývají souřadnice vektoru v v této bázi.

Souřadnice vektorů

Definition

Když je množina $\{v_1, \dots, x_n\} \subset V$ báze, můžeme každý vektor $v \in V$ vyjádřit jednoznačně jako lineární kombinaci $v = a_1 v_1 + \cdots a_n v_n$. Koeficienty této jediné lineární kombinace vyjadřující daný vektor $v \in V$ ve zvolené bázi se nazývají souřadnice vektoru v v této bázi.

Napište souřadnice vektoru $1 + x + x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ v bázi:

- $M = \{1, x, x^2\}$.

Souřadnice vektorů

Definition

Když je množina $\{v_1, \ldots, x_n\} \subset V$ báze, můžeme každý vektor $v \in V$ vyjádřit jednoznačně jako lineární kombinaci $v = a_1 v_1 + \cdots a_n v_n$. Koeficienty této jediné lineární kombinace vyjadřující daný vektor $v \in V$ ve zvolené bázi se nazývají souřadnice vektoru v v této bázi.

Napište souřadnice vektoru $1 + x + x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ v bázi:

- $M = \{1, x, x^2\}$.
- $M = \{1 + x, x + x^2, x^2\}$.

Výběr báze

Najděte bázi a určete dimenzi lineárního obalu množiny:
$M = \{(1,1,0),(1,2,3,),(2,3,3),(4,6,6),(6,9,9)\} \subset \mathbb{R}^3$

Plán cvičení

Lineární zobrazení

Nechť V a W jsou vektorové prostory nad týmž polem skalárů $\mathbb{K}$. Zobrazení se nazýva lineární zobrazení (homomorfismus) jestliže platí

$$f(u+v) = f(u) + f(v),\ u, v \in V \tag{1}$$

$$f(a \cdot v) = a \cdot f(v),\ a \in \mathbb{K},\ u \in V \tag{2}$$

Lineární zobrazení

Nechť V a W jsou vektorové prostory nad týmž polem skalárů $\mathbb{K}$. Zobrazení se nazýva lineární zobrazení (homomorfismus) jestliže platí

$$f(u+v) = f(u) + f(v),\; u, v \in V \tag{1}$$

$$f(a \cdot v) = a \cdot f(v),\; a \in \mathbb{K},\; u \in V \tag{2}$$

Ověřte zda zobarazení derivace na polynomech třetího stupně, tj. zobrazení $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ přiřazující prvku z $\mathbb{R}_3[x]$ jeho derivaci je, nebo není lineární zobrazení.

Plán cvičení

Matice přechodu

Theorem

Matici přechodu (od báze u k bázi v) získáme tak, že souřadnice vektorů báze u v bázi v napíšeme do sloupců matice.

Matice přechodu

Theorem

Matici přechodu (od báze u k bázi v) získáme tak, že souřadnice vektorů báze u v bázi v napíšeme do sloupců matice.

Napište matici přechodu od báze $\{1, x + x^2, x^2\}$ k bázi $\{1, 1 + x + x^2, 1 + x^2\}$.

Matice lineárního zobrazení

Napište matici lineárního zobrazení derivace $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ v bázi $\{1 + x, x + x^2, x^2\}$

Matice $Mat_{2\times 2}$

- Je množina $\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ báze ?

Matice $Mat_{2\times 2}$

- Je množina $\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ báze ?
- Je zobrazen $tr : Mat_{2\times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ lineární zobrazení?

Matice $Mat_{2\times 2}$

- Je množina $\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ báze ?
- Je zobrazen $tr : Mat_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ lineární zobrazení?
- Jak vypadá matice lineárního zobrazení tr v bázi α ?

Polynomy $\mathbb{R}_4[x]$

- Je množina $\alpha = \{1, x^2, 1 + x^2, x^2 + x^3, x^4\}$ báze ?

Polynomy $\mathbb{R}_4[x]$

- Je množina $\alpha = \{1, x^2, 1 + x^2, x^2 + x^3, x^4\}$ báze ?
- Je zobrazen *int* : $\mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_5[x]$ lineární zobrazení?

Polynomy $\mathbb{R}_4[x]$

- Je množina $\alpha = \{1, x^2, 1 + x^2, x^2 + x^3, x^4\}$ báze ?
- Je zobrazen *int* : $\mathbb{R}_4[x] \rightarrow \mathbb{R}_5[x]$ lineární zobrazení?
- Jak vypadá matice lineárního zobrazení *int* v bázi α ?