Drsná matematika I – 8. Demonstrované cvičení Determinanty

Lenka Zalabová

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

10. 4. 2007

Obsah cvičení

Plán cvičení

Inverzní matice

Vypočítejte inverzní matici A^{-1} k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & -11 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Udělejte zkoušku.

Inverzní matice

Vypočítejte inverzní matici A^{-1} k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & -11 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Udělejte zkoušku.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 154 & -179 & -205 & 235 \\ -36 & 42 & 48 & -55 \\ 6 & -7 & -8 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lineární závislost a nezávislost

Rozhodněte, zda následující vektory v $\mathbb{R}^4$ jsou lineárně závislé nebo nezávislé:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Lineární závislost a nezávislost

Rozhodněte, zda následující vektory v $\mathbb{R}^4$ jsou lineárně závislé nebo nezávislé:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- Lineárně závislé.

Geometrická zobrazení

1. Najděte matici zobrazení φ v $\mathbb{R}^3$, které je rotací o úhel π kolem přímky dané počátkem a vektorem $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Geometrická zobrazení

1. Najděte matici zobrazení φ v $\mathbb{R}^3$, které je rotací o úhel π kolem přímky dané počátkem a vektorem $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Najděte matici zobrazení φ v $\mathbb{R}^3$, které je zrcadlením podle roviny jdoucí počátkem a kolmé na vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Plán cvičení

Něco málo o permutacích

Určete počet inverzí a paritu permutace

1. $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 7 & 9 & 8 & 6 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Něco málo o permutacích

Určete počet inverzí a paritu permutace

1. $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 7 & 9 & 8 & 6 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. $$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2n & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Členy determinantu

1. Rozhodněte, zda se daný součin vyskytuje v determinantu matice $A = (a_{ij})$ řádu n, resp. s jakým znaménkem:
    1. $n = 6$, $a_{31}a_{43}a_{14}a_{52}a_{66}a_{25}$

Členy determinantu

1. Rozhodněte, zda se daný součin vyskytuje v determinantu matice $A = (a_{ij})$ řádu n, resp. s jakým znaménkem:
   1. $n = 6,\ a_{31}a_{43}a_{14}a_{52}a_{66}a_{25}$
   2. $n = 6,\ a_{13}a_{24}a_{41}a_{56}a_{65}a_{22}$

Členy determinantu

1. Rozhodněte, zda se daný součin vyskytuje v determinantu matice $A = (a_{ij})$ řádu n, resp. s jakým znaménkem:
    1. $n = 6$, $a_{31}a_{43}a_{14}a_{52}a_{66}a_{25}$
    2. $n = 6$, $a_{13}a_{24}a_{41}a_{56}a_{65}a_{22}$
    3. $n = 8$, $a_{72}a_{17}a_{43}a_{21}a_{64}a_{35}a_{56}$

Členy determinantu

1. Rozhodněte, zda se daný součin vyskytuje v determinantu matice $A = (a_{ij})$ řádu n, resp. s jakým znaménkem:
   1. $n = 6,\ a_{31}a_{43}a_{14}a_{52}a_{66}a_{25}$
   2. $n = 6,\ a_{13}a_{24}a_{41}a_{56}a_{65}a_{22}$
   3. $n = 8,\ a_{72}a_{17}a_{43}a_{21}a_{64}a_{35}a_{56}$
2. Uveďte všechny členy determinantu dané matice $A = (a_{ij})$ řádu 4, které obsahují prvky $a_{12},\ a_{34}$.

Saarusovo pravidlo

Určete determinanty:

1. $$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

Saarusovo pravidlo

Určete determinanty:

1. $$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

2. $$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

Výpočet z definice?

Z definice determinantu určete:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Opět Gaussova eliminační metoda

Pomocí Gaussovy eliminační metody vypočítejte:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Výpočet pomocí Laplaceova rozvoje

Pomocí Laplaceova rozvoje vypočítejte:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Nejlepší je kombinace metod...

Vypočítejte:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 8 & 1 & -8 & 27 & -1 \\ 16 & 1 & 16 & 81 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinant a inverzní matice

S použitím determinantu najděte inverzní matici A^{-1} k

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice obecného řádu

Vypočítejte determinant matice řádu $n \geq 2$:

$$\begin{pmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}$$

Další matice obecného řádu

Vypočítejte determinant matice řádu $n \geq 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ještě matice obecného řádu

Vypočítejte determinant matice řádu $n \geq 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -n+1 & 0 \end{pmatrix}$$

Něco na závěr...

S použitím Cauchyovy věty vypočítejte:

$$\begin{vmatrix} x_1 - y_1 & x_1 - y_2 & \dots & x_1 - y_n \\ x_2 - y_1 & x_2 - y_2 & \dots & x_2 - y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - y_1 & x_n - y_2 & \dots & x_n - y_n \end{vmatrix}$$