Drsná matematika I – 9. Demonstrované cvičení
Vektorové prostory

Lenka Zalabová

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

17. 4. 2007

Obsah cvičení

Plán cvičení

Determinant

Najděte determinant matice A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinant

Najděte determinant matice A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-18$$

Další determinant

Najděte determinant matice B^2, kde:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Další determinant

Najděte determinant matice B^2, kde:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cauchyova věta:

$$0^2 = 0$$

Inverzní matice

Pomocí determinantu najděte inverzní matici (eliminační metoda nebude uznána):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice

Pomocí determinantu najděte inverzní matici (eliminační metoda nebude uznána):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Ješte determinant

Najděte determinant matice řádu $n \geq 2$:

$$\begin{pmatrix} 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \end{pmatrix}$$

Ještě determinant

Najděte determinant matice řádu $n \geq 2$:

$$\begin{pmatrix} 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \end{pmatrix}$$

0

Plán cvičení

Definition (Vektorové prostory)

Vektorovým prostorem V nad polem skalarů $\mathbb{K}$ je množina spolu s operacemi sčítání a násobení skalárem z $\mathbb{K}$, pro které platí následující axiomy:

Definition (Vektorové prostory)

Vektorovým prostorem V nad polem skalarů $\mathbb{K}$ je množina spolu s operacemi sčítání a násobení skalárem z $\mathbb{K}$, pro které platí následující axiomy:

1. $(u+v)+w = u+(v+w)$ pro všechna $u, v, w \in V$
2. $u+v = v+u$ pro všechna $u, v \in V$
3. existuje prvek 0 takový, že $u+0=u$ pro všechna $u \in V$
4. ke každému $u \in V$ existuje prvek $-u \in V$ takový, že $u+(-u)=0$

Definition (Vektorové prostory)

Vektorovým prostorem V nad polem skalarů $\mathbb{K}$ je množina spolu s operacemi sčítání a násobení skalárem z $\mathbb{K}$, pro které platí následující axiomy:

1. $(u+v)+w = u+(v+w)$ pro všechna $u, v, w \in V$
2. $u+v = v+u$ pro všechna $u, v \in V$
3. existuje prvek 0 takový, že $u+0 = u$ pro všechna $u \in V$
4. ke každému $u \in V$ existuje prvek $-u \in V$ takový, že $u+(-u) = 0$
5. $a \cdot (u+v) = a \cdot u + a \cdot v$ pro všechna $u, v \in V$ a $a \in \mathbb{K}$
6. $(a+b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$ pro všechna $u \in V$ a $a, b \in \mathbb{K}$
7. $a \cdot (b \cdot u) = (a \cdot b) \cdot u$ pro všechna $u \in V$ a $a, b \in \mathbb{K}$
8. $1 \cdot u = u$ pro všechna $v \in V$

Definition (Vektorové prostory)

Vektorovým prostorem V nad polem skalarů $\mathbb{K}$ je množina spolu s operacemi sčítání a násobení skalárem z $\mathbb{K}$, pro které platí následující axiomy:

1. $(u+v)+w = u+(v+w)$ pro všechna $u, v, w \in V$
2. $u+v = v+u$ pro všechna $u, v \in V$
3. existuje prvek 0 takový, že $u+0 = u$ pro všechna $u \in V$
4. ke každému $u \in V$ existuje prvek $-u \in V$ takový, že $u+(-u) = 0$
5. $a \cdot (u+v) = a \cdot u + a \cdot v$ pro všechna $u, v \in V$ a $a \in \mathbb{K}$
6. $(a+b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$ pro všechna $u \in V$ a $a, b \in \mathbb{K}$
7. $a \cdot (b \cdot u) = (a \cdot b) \cdot u$ pro všechna $u \in V$ a $a, b \in \mathbb{K}$
8. $1 \cdot u = u$ pro všechna $v \in V$

Z dřívějšího vlastně víme, že $\mathbb{R}^n$ a obecně $\mathbb{K}^n$ s operacemi po složkách tvoří vektorový prostor. Co nějaké jiné?

Dokažte, že...

Dokažte, že množina $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ všech reálných čtvercových matic řádu 2 s operacemi danými standardním maticovým sčítáním a násobením skalárem tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Vektorový prostor – ano či ne?

Rozhodněte (=dokažte nebo vyvrat'te), zda množina V tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{K}$:

Vektorový prostor – ano či ne?

Rozhodněte (=dokažte nebo vyvrat'te), zda množina V tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{K}$:

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ s operacemi $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ a $k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Vektorový prostor – ano či ne?

Rozhodněte (=dokažte nebo vyvrat'te), zda množina V tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{K}$:

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ s operacemi $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ a $k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^+$ s operacemi sčítání $u \oplus v = u \cdot v$ pro $u, v \in \mathbb{R}^+$ $(= V)$ a násobení skalárem $t \circ u = u^t$ pro $u \in \mathbb{R}^+ (= V)$ a $t \in \mathbb{R}$ $(= \mathbb{K})$

Vektorový prostor – ano či ne?

Rozhodněte (=dokažte nebo vyvrat'te), zda množina V tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{K}$:

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ s operacemi $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ a $k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^+$ s operacemi sčítání $u \oplus v = u \cdot v$ pro $u, v \in \mathbb{R}^+$ $(= V)$ a násobení skalárem $t \circ u = u^t$ pro $u \in \mathbb{R}^+ (= V)$ a $t \in \mathbb{R}$ $(= \mathbb{K})$
3. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \{(x, y)^T \mid x \geq 0\}$ se standardními operacemi (po složkách)

Tohle něco připomíná...

Definition (Lineární závislost a nezávislost)

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Množina vektorů $M \subset V$ se nazývá *linearně nezávislá*, jestliže pro každou k-tici vektorů $v_1, \dots, v_k \in M$ a libovolné skaláry $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

Tohle něco připomíná...

Definition (Lineární závislost a nezávislost)

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Množina vektorů $M \subset V$ se nazývá *linearně nezávislá*, jestliže pro každou k-tici vektorů $v_1, \ldots, v_k \in M$ a libovolné skaláry $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

Množina vektorů M je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá.

Lineárně závislé nebo nezávislé?

- Prostor $V = \mathbb{R}_2[x]$ polynomů stupně nejvýše 2 se standardními operacemi tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda vektory $1 + x, 1 - x, 2 + x - x^2$ jsou lineárně závislé nebo nezávislé.

Lineárně závislé nebo nezávislé?

- Prostor $V = \mathbb{R}_2[x]$ polynomů stupně nejvýše 2 se standardními operacemi tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda vektory $1 + x, 1 - x, 2 + x - x^2$ jsou lineárně závislé nebo nezávislé.
- Rozhodněte, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé vektory $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ z $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

Definition (Vektorové podprostory)

Necht' V je vektorový prostor (nad $\mathbb{K}$). *Vektorový podprostor* vektorového prostoru V je podmnožina $U \subset V$, pro kterou platí:

Definition (Vektorové podprostory)

Nechť V je vektorový prostor (nad $\mathbb{K}$). *Vektorový podprostor* vektorového prostoru V je podmnožina $U \subset V$, pro kterou platí:

- $u + v \in U \quad \forall u, v \in U$
- $r \cdot u \in U \quad \forall u \in U, \ \forall r \in \mathbb{K}$
- $0 \in U$

Definition (Vektorové podprostory)

Nechť V je vektorový prostor (nad $\mathbb{K}$). *Vektorový podprostor* vektorového prostoru V je podmnožina $U \subset V$, pro kterou platí:

- $u + v \in U \quad \forall u, v \in U$
- $r \cdot u \in U \quad \forall u \in U, \ \forall r \in \mathbb{K}$
- $0 \in U$

Tedy U je vektorovým prostorem nad $\mathbb{K}$ se zúženými operacemi z V.

Vektorový podprostor – ano či ne?

- Rozhodněte, zda množina $\{\binom{x_1}{x_2} \mid x_1 + x_2 = 0\}$ (prostor všech řešení 'soustavy' $x_1 + x_2 = 0$) je vektorový podprostor $\mathbb{R}^2$.

Vektorový podprostor – ano či ne?

- Rozhodněte, zda množina $\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mid x_1 + x_2 = 0\}$ (prostor všech řešení 'soustavy' $x_1 + x_2 = 0$) je vektorový podprostor $\mathbb{R}^2$.
- Rozhodněte, zda množina $\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$ je vektorový podprostor $\mathbb{R}^2$.

Vektorový podprostor – ano či ne?

- Rozhodněte, zda množina $\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mid x_1 + x_2 = 0\}$ (prostor všech řešení 'soustavy' $x_1 + x_2 = 0$) je vektorový podprostor $\mathbb{R}^2$.
- Rozhodněte, zda množina $\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$ je vektorový podprostor $\mathbb{R}^2$.
- Rozhodněte, zda množina $\left\{f \mid \exists g : f = g \cdot (x^2 + 1)\right\}$ je vektorový podprostor prostoru všech polynomů $\mathbb{R}[x]$.

Generování

Theorem

Podprostor vektorového prostoru V generovaný množinou $M \subset V$ je tvaru:

$$[M] = \{a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k \mid k \in \mathbb{N}, a_j \in \mathbb{K}, u_j \in M, j = 1, \ldots, k\}$$

Generujeme...

- Rozhodněte, zda vektory $u_1, \dots, u_4$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Generujeme...

- Rozhodněte, zda vektory $u_1, \ldots, u_4$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
- Rozhodněte, zda vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ náleží do $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$.

Průniky a součty

Je průnik vektorových podprostorů opět vektorový podprostor?

Průniky a součty

Je průnik vektorových podprostorů opět vektorový podprostor?

- ANO

Průniky a součty

Je průnik vektorových podprostorů opět vektorový podprostor?

- ANO

Je sjednocení vektorových podprostorů vektorový podprostor?

Průniky a součty

Je průnik vektorových podprostorů opět vektorový podprostor?

- ANO

Je sjednocení vektorových podprostorů vektorový podprostor?

- NE

Průniky a součty

Je průnik vektorových podprostorů opět vektorový podprostor?

- ANO

Je sjednocení vektorových podprostorů vektorový podprostor?

- NE

Definition

Nechť $S, T \subseteq V$ jsou vektorové podprostory. *Součet* podprostorů je vektorový podprostor

$$S + T = [S \cup T] = \{x + y \mid x \in S, y \in T\}.$$

Součet se nazývá *přímý*, jestliže navíc $S \cap T = \{0\}$. Píšeme $S \oplus T$.

Rozhodněte, zda...

Nechť S, T jsou podprostory vektorového prostoru V.
Rozhodněte, zda je součet $S + T$ přímý.

Rozhodněte, zda...

Nechť S, T jsou podprostory vektorového prostoru V. Rozhodněte, zda je součet $S + T$ přímý.

1. $V = \mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$, $S = \{(x, y)^T \mid x = y\}$, $T = \{(x, y)^T \mid x = -y\}$

Rozhodněte, zda...

Nechť S, T jsou podprostory vektorového prostoru V.
Rozhodněte, zda je součet $S + T$ přímý.

1. $V = \mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$, $S = \{(x, y)^T \mid x = y\}$,
   $T = \{(x, y)^T \mid x = -y\}$
2. $V = \mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, $S = \{(x, y, z)^T \mid x - 2y - 3z = 0\}$,
   $T = \{(x, y, z)^T \mid x = z\}$

Rozhodněte, zda...

Necht' S, T jsou podprostory vektorového prostoru V. Rozhodněte, zda je součet $S + T$ přímý.

1. $V = \mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$, $S = \{(x, y)^T \mid x = y\}$, $T = \{(x, y)^T \mid x = -y\}$
2. $V = \mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, $S = \{(x, y, z)^T \mid x - 2y - 3z = 0\}$, $T = \{(x, y, z)^T \mid x = z\}$
3. $V = \mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, $S = \{(x, y, z)^T \mid x = y = 0\}$, $T = \{(x, y, z)^T \mid y = z = 0\}$

Rozhodněte, zda...

Nechť S, T jsou podprostory vektorového prostoru V.
Rozhodněte, zda je součet $S + T$ přímý.

1. $V = \mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$, $S = \{(x, y)^T \mid x = y\}$,
   $T = \{(x, y)^T \mid x = -y\}$
2. $V = \mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, $S = \{(x, y, z)^T \mid x - 2y - 3z = 0\}$,
   $T = \{(x, y, z)^T \mid x = z\}$
3. $V = \mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, $S = \{(x, y, z)^T \mid x = y = 0\}$,
   $T = \{(x, y, z)^T \mid y = z = 0\}$

O jaké podprostory se jedná?