První zápočtový test – 1. termín

Část I (celkem 12 bodů)

Počítáte všechny 3 příklady!

Úloha 1 (4 body). Sestrojte přirozený kubický interpolační splajn pro funkci

$$\frac{1}{1+x^2}$$

na intervalu $[0,3]$, volíte-li za uzly po řadě body

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Nestačí pouze uvést výsledek: je nutný i správný postup!

Výsledek. Výsledek je

$$S_0(x) = 1 - \frac{11}{20}x + \frac{1}{20}x^3,$$
$$S_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{5}(x-1) + \frac{3}{20}(x-1)^2 - \frac{1}{40}(x-1)^3.$$

$\square$

Úloha 2 (4 body). Vypočtěte

$$\lim_{x\to 0+} x \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

Výsledek. Je

$$\lim_{x\to 0+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

$\square$

Úloha 3 (4 body). Nalezněte 1. derivaci funkce

$$\left(2 - x^2\right)\cos x + 2x \sin x.$$

Výraz poté upravte do co nejjednodušší podoby.

Výsledek. Výsledek je

$$x^2 \cdot \sin x.$$

$\square$

Část II (celkem 12 bodů)

Počítáte 3 příklady z 5 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 4 (4 body). Nalezněte polynom p nejvýše třetího stupně, pro který platí

$$p(0) = 2, \quad p(1) = 3, \quad p(2) = 12, \quad p(5) = 147.$$

Výsledný polynom uveďte ve tvaru $ax^3 + bx^2 + cx + d$, tj. nalezněte koeficienty a, b, c, d.

Výsledek. Hledaný polynom je

$$p(x) = x^3 + x^2 - x + 2.$$

$\square$

Úloha 5 (4 body). Bez použití l'Hospitalova pravidla vyčíslete

$$\lim_{x \to 0-} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x}.$$

Výsledek. Pomocí limity

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \frac{3}{5}.$$

lze snadno obdržet

$$\lim_{x \to 0-} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x} = \frac{3}{5}.$$

$\square$

Úloha 6 (4 body). Ve kterých bodech je tečna funkce

$$f(x) = y = 2 + x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

rovnoběžná s osou x?

Výsledek. Výsledkem je jediný bod $x = \frac{1}{2}$, resp.

$$[x, y] = \left[\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right].$$

$\square$

Úloha 7 (4 body). Rozhodněte, zda existuje $a \in \mathbb{R}$ takové, že funkce $a \cdot x + \sin x$ má v bodě $x = \frac{5\pi}{4}$ globální minimum na intervalu $[0, 2\pi]$.

Výsledek. Neexistuje: pro $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ má uvažovaná funkce v daném bodě pouze lokální extrém. $\square$

Úloha 8 (4 body). Odhadněte chybu přibližného vzorce

$$\ln(1 + x) \doteq x - \frac{x^2}{2}$$

pro obecné $x \in (-1, 0)$.

Výsledek. Vhodný „ostrý“ odhad je např.

$$\frac{-x^3}{3(1 + x)^3}.$$

$\square$

Část III (celkem 6 bodů)

Odpovídáte na 3 úlohy ze 4 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 9 (2 body). Jaká je *definice* interpolačního polynomu p pro (funkční) hodnoty $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ v navzájem různých bodech $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$?

Výsledek. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 1 dole a str. 2 uprostřed. $\square$

Úloha 10 (2 body). Uveďte příklad podmnožiny X množiny $\mathbb{R}$ takové, že pro ni platí

$$\sup X \leq \inf X.$$

Zvláště tedy musí existovat $\sup X$ i $\inf X$.

Výsledek. Uvažte jakoukoli jednoprvkovou množinu $X \subset \mathbb{R}$. □

Úloha 11 (2 body). Určete maximální definiční obor (tj. největší vzhledem k množinové inkluzi podmnožinu $\mathbb{R}$), kde je funkce

$$f(x) = 2x^{21} \cdot \frac{e^{\cos\left(x^2-21\right)+x-256x^3} - 11}{2 + x^{252}}$$

spojitá.

Výsledek. Zjevně (viz skriptum doc. Hilschera, str. 14 – Věta 5, (iii)) je

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}_{\max}(f) = \mathbb{R}, \quad \text{tedy } f \in C(\mathbb{R}).$$

□

Úloha 12 (2 body). Napište, čemu se rovná

$$(\operatorname{arccotg} x)'.$$

Výsledek. Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

□

První zápočtový test – 2. termín

Část I (celkem 12 bodů)

Počítáte všechny 3 příklady!

Úloha 1 (4 body). Rozložte na parciální zlomky racionální funkci

$$\frac{1}{x^3(x+1)}.$$

Výsledek. Lze vyjádřit

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x+1}.$$

□

Úloha 2 (4 body). Určete derivaci funkce $x^{\sin x}$.

Výsledek. Výsledek je

$$x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

□

Úloha 3 (4 body). Za pomoci diferenciálu přibližně vypočítejte $\sin\left(\frac{29}{180}\pi\right)$. Uvažte přitom, čemu se rovná $\sin\left(\frac{30}{180}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Výsledek nemusíte upravovat (vyčíslovat).

Malá rada: Výpočet musí být prováděn v radiánech, ne ve stupních!

Výsledek. Výsledek by měl být uveden ve tvaru

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{360}.$$

□

Část II (celkem 12 bodů)

Počítáte 3 příklady z 5 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 4 (4 body). Určete

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\cdot 4^n - 8n^6 - 2^n - 112}{2\cdot 3^{n+12} - 45n - \sqrt{111}\cdot \pi^{n+12}}.$$

Výsledek. Výsledek je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\cdot 4^n - 8n^6 - 2^n - 112}{3^{n+12} - 45n - \sqrt{111}\pi^{n+12}} = -\infty.$$

□

Úloha 5 (4 body). Zcela libovolným způsobem potvrďte, že je

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Tedy dokažte, že předešlá rovnost má smysl a platí.

Nejdříve však přemýšlejte. Jde to velmi jednoduše...

Výsledek. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 17, nebo vizte lHospitalovo pravidlo. □

Úloha 6 (4 body). Pod jakým úhlem protíná graf funkce $\ln x$ osu x. (Úhlem protnutí, jak je běžné, rozumíme úhel směrového vektoru tečny s kladnou poloosou x v kladném smyslu otáčení v rovině – proti směru pohybu hodinových ručiček – od poloosy k tečně.)

Pokud nedokážete odpovědět, nevadí! Stačí, když uvedete tečnu k dané funkci v bodě protnutí kladné poloosy x.

Výsledek. Nejhezčí odpověď je $\frac{\pi}{4}$. Správná je ale i odpověď $y = x - 1$. □

Úloha 7 (4 body). Využitím Lagrangeovy věty dokažte, že funkce f diferencovatelná v každém reálném bodě s derivací identicky rovnou 0 (tj. $f' \equiv 0$, tj. $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$) je konstantní.

Výsledek. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 35. □

Úloha 8 (4 body). Určete interval, na kterém je funkce e^{-x^2} konkávní.

Výsledek. Daná funkce je konkávní pouze na intervalu $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ □

Část III (celkem 6 bodů)

Odpovídáte na 3 úlohy ze 4 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 9 (2 body). Nechť jsou pevně zadány nějaké body a nějaké hodnoty. Uveďte alespoň 1 zásadní rozdíl (tedy rozdíl z matematického hlediska), který je mezi Hermitovým interpolačním polynomem a Lagrangeovým interpolačním polynomem.

Můžete odpovědět pouze tak, že napíšete: „Není mezi nimi žádný faktický rozdíl. Jeden na druhý lze totiž převést roznásobením.“

Výsledek. Je mezi nimi rozdíl – viz skriptum doc. Hilschera, str. 3, 4. □

Úloha 10 (2 body). Co to znamená, když o racionální lomené funkci prohlásíme, že je *ryze lomenou*?

Výsledek. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 7. □

Úloha 11 (2 body). Uveďte větu „O třech limitách“.

Výsledek. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 14. □

Úloha 12 (2 body). Čemu se rovná

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$$

za předpokladu, že daný výraz existuje a má obvyklý význam?

Výsledek. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 26, Věta 10 (iv). $\square$

První zápočtový test – 3. termín

Část I (celkem 12 bodů)

Počítáte všechny 3 příklady!

Úloha 1 (4 body). Uveďte libovolný polynom P splňující tyto podmínky:

$$P(0) = 6; \quad P(1) = 4; \quad P(2) = 4; \quad P'(2) = 1.$$

Slovo „libovolný“ přitom znamená „libovolného stupně“.

Výsledek. Hledaným polynomem je kupř.

$$x^2 - 3x + 6.$$

$\square$

Úloha 2 (4 body). Najděte rovnice tečny a normály ke křivce $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$, tj. ke grafu funkce $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$, v bodě $[-1, 0]$.

Výsledek. Tečna má rovnici

$$y = \sqrt[3]{4}(x+1),$$

a proto je normála

$$y = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1).$$

$\square$

Úloha 3 (4 body). Nalezněte všechny (se směrnicí i bez směrnice) asymptoty těchto dvou funkcí:

$$x \cdot e^x; \qquad \frac{(x+3)^3}{(x-2)^3}.$$

Výsledek. Hledané asymptoty jsou $y = 0$ v $-\infty$ v případě funkce $x \cdot e^x$ a $x = 2$ – bez směrnice, $y = 1$ v $\pm\infty$ ve druhém případě. $\square$

Část II (celkem 12 bodů)

Počítáte 3 příklady z 5 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 4 (4 body). Vyjádřete racionální funkci

$$\frac{3x^4 + 2x^3 - x^2 + 1}{3x + 2}$$

jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce. Tj. dělte.

Výsledek. Výsledkem je

$$\frac{3x^4 + 2x^3 - x^2 + 1}{3x + 2} = x^3 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} + \frac{5}{9(3x + 2)}.$$

$\square$

Úloha 5 (4 body). Přímo z definice vlastní limity ve vlastním bodě dokažte, že je

$$\lim_{x \to 0} x^3 - 2 = -2.$$

Výsledek. V podstatě stačí uvést přiřazení (pro $\varepsilon > 0$)

$$\varepsilon \mapsto \delta, \quad \text{tj. } \delta := \varepsilon,$$

přičemž bez újmy na obecnosti lze požadovat, aby $\varepsilon < 1$. Pokud by totiž bylo $\varepsilon > 1$, lze položit $\delta = 1$. $\square$

Úloha 6 (4 body). Vypočtěte

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x.$$

Výsledek. Po rozšíření výrazem

$$\frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

lze dostat

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \frac{1}{2}.$$

$\square$

Úloha 7 (4 body). Určete první derivaci funkce

$$\sin(\sin(\sin x)).$$

Výsledek. Derivace zadané funkce je

$$(\cos x) \cdot (\cos(\sin x)) \cdot (\cos(\sin(\sin x))).$$

$\square$

Úloha 8 (4 body). Nechť je dána funkce f a bod z takový, že platí

$$f(z) = 0, \quad f'(z) = 0, \quad f''(z) = 0, \quad f^{(3)}(z) = 1. \tag{$*$}$$

Opište ty z výroků (případně napište jen písmena je uvozující)

(a) bod z je stacionárním bodem f,

(b) funkce f není polynomem druhého stupně,

(c) funkce f v bodě z roste,

(d) funkce f nemá v bodě z ostré lokální minimum,

(e) bod z je inflexním bodem funkce f,

které jsou *zcela jistě pravdivé* (tj. platí vždy – tedy pro všechny funkce f splňující $(*)$.)

Odůvodněte, proč jsou podle Vás jednotlivé výroky pravdivé, či nikoli. Zvláště pak uveďte protipříklad, pokud budete tvrdit, že nějaké tvrzení obecně platit nemusí.

Výsledek. Pravdivá jsou všechna tvrzení. $\square$

Část III (celkem 6 bodů)

Odpovídáte na 3 úlohy ze 4 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 9 (2 body). Nechť jsou zcela libovolně dány hodnoty $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ v navzájem různých bodech $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Pro fundamentální polynomy $l_i, i = 0, 1, \ldots, n$ zavedené v souvislosti s výpočtem Lagrangeova interpolačního polynomu (to, jak jsou zavedeny, musíte znát) na celé reálné ose (tj. pro všechna $x \in \mathbb{R}$) platí

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1.$$

Dokažte to!

Výsledek. Důkaz zazněl na prvním cvičení. Je založen na Větě 1 ze skripta doc. Hilschera uvedené na str. 1. □

Úloha 10 (2 body). Existuje funkce ryze monotónní (a tudíž definovaná) na celé reálné ose, která není v nějakém bodě spojitá, ale k ní inverzní funkce je spojitá na celém svém definičním oboru? Odpovězte pouze „ano“, nebo „ne“.

Pokud odpovídáte „ano“, uveďte příklad dokládající správnost Vaší odpovědi.

Výsledek. Správná odpověď je „ne“. Uvažte větu O spojitosti inverzní funkce (ve skriptu doc. Hilschera na str. 19 – Věta 8) a skutečnost, že inverzní funkce k inverzní funkci k nějaké ryze monotónní funkci F je opět F. □

Úloha 11 (2 body). Rozhodněte, které ze vztahů

(a) $\mathcal{D}(f) \subset \mathcal{D}(f')$,

(b) $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f')$,

(c) $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathcal{D}(f')$,

(d) $\mathcal{D}(f') \subseteq \mathcal{D}(f)$

platí pro *všechny* reálné funkce f. Může platit jeden, dva, tři, všechny, ale také žádný!

Výsledek. Platí pouze (d). Viz skriptum doc. Hilschera, str. 24, nahoře. □

Úloha 12 (2 body). Určete $f'(1)$, je-li $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$. Přemýšlejte, než začnete počítat.

Výsledek. Bez dalších poznámek lze přímo napsat výsledek

$$(1-2)^2 \cdot (1-3)^3 = -8.$$

$\square$

První zápočtový test – 4. termín

Část I (celkem 12 bodů)

Počítáte všechny 3 příklady!

Úloha 1 (4 body). Upravte funkci

$$\frac{x^4+6x^2+x-2}{x^4-2x^3}$$

na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce Q. Získanou funkci Q poté vyjádřete ve tvaru součtu tzv. parciálních zlomků.

Výsledek. Výsledkem je

$$\frac{x^4+6x^2+x-2}{x^4-2x^3} = 1 + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x} + \frac{5}{x-2}.$$

□

Úloha 2 (4 body). Spočítejte následující dvě limity

$$\lim_{x\to 0+} x^{\frac{\alpha}{\ln x}},$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{\alpha}{\ln x}},$$

přičemž $\alpha \in \mathbb{R}$ je libovolné.

Výsledek. V obou případech je výsledek e^{α}. □

Úloha 3 (4 body). Nalezněte všechny globální (tj. absolutní) extrémy polynomu $p(x) = x^3 - 3x + 2$ na intervalu $[-3, 2]$.

Výsledek. Globální extrémy jsou

$$4 = p(-1) = p(2), \quad -16 = p(-3).$$

□

Část II (celkem 12 bodů)

Počítáte 3 příklady z 5 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 4 (4 body). Stanovte Hermitův interpolační polynom, je-li požadováno:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 1,$$

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 4, \quad y_2 = 1,$$
$$y_0' = 0, \quad y_1' = 4, \quad y_2' = 2.$$

Rada: Přemýšlejte (nejen u té soustavy rovnic)!

Výsledek. Tím je zřejmě x^2. □

Úloha 5 (4 body). Vypočtěte

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}.$$

Výsledek. Je

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1.$$

□

Úloha 6 (4 body). Určete druhou derivaci funkce tg x. Přitom nemusíte uvádět na jaké reálné podmnožině jste ji určili.

Výsledek. Výsledek je
$$\frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$
$\square$

Úloha 7 (4 body). Určete derivaci funkce $y = f(x)$ zadané rovnicí $11y - \cos y = \sin x + 256$.

Výsledek. Výsledek je
$$\frac{\cos x}{11 + \sin y}.$$
$\square$

Úloha 8 (4 body). Určete Taylorův polynom stupně 4 funkce $e^{-\frac{x^2}{2}}$ se středem v počátku (tj. pro $x_0 = 0$).

Výsledek. Hledaný polynom je
$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}.$$
$\square$

Část III (celkem 6 bodů)

Odpovídáte na 3 úlohy ze 4 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 9 (2 body). Nechť jsou libovolně zvoleny hodnoty $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ v navzájem různých bodech $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, přičemž $y_0 \neq 0$ a $n \in \mathbb{N}$ je také libovolné. Kolik existuje polynomů stupně

(a) n,

(b) $n+1$,

(c) $2n$,

jenž nabývají v uvedených bodech zadaných hodnot?

Není-li odpověď jednoznačná, uveďte diskusi (tj. matematický rozbor) vzhledem k dalším Vámi určeným podmínkám.

Výsledek. Správná odpověď je (viz skriptum doc. Hilschera, str. 1):

(a) právě jeden,

(b) nekonečně mnoho,

(c) nekonečně mnoho.

□

Úloha 10 (2 body). Uveďte příklad funkce definované na otevřeném intervalu a nějakého bodu jejího definičního oboru, ve kterém nastává tzv. skok. Tuto funkci (samozřejmě) *nemůžete* zadat obrázkem nebo tabulkou!

Výsledek. Taková funkce může být např. definována takto:

$$f(x) = \sin x, \quad x \in (0,1),$$
$$f(x) = 2\,513, \quad x = 0,$$
$$f(x) = \cos x, \quad x \in (-1,0).$$

Bodem, v němž nastává skok, je $x_0 = 0$. □

Úloha 11 (2 body). Napište vzorec pro výpočet derivace inverzní funkce k funkci f (v libovolném bodu $x \in \mathbb{R}$), má-li f na celé reálné ose derivaci a je všude rostoucí (proto má také všude nenulovou derivaci).

Výsledek. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 29. □

Úloha 12 (2 body). Definujte pojem „inflexní bod“.

Výsledek. Viz skriptum doc. Hilschera, Definice 12 na str. 44. □