Část I (celkem 12 bodů)

Počítáte všechny 3 příklady!

Úloha 1 (4 body). Sestrojte přirozený kubický interpolační splajn pro funkci

$$\frac{1}{1+x^2}$$

na intervalu $[0, 3]$, volíte-li za uzly po řadě body

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Nestačí pouze uvést výsledek: je nutný i správný postup!

Úloha 2 (4 body). Vypočtěte

$$\lim_{x\to 0+} x \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

Úloha 3 (4 body). Nalezněte 1. derivaci funkce

$$\left(2 - x^2\right) \cos x + 2x \sin x.$$

Výraz poté upravte do co nejjednodušší podoby.

Část II (celkem 12 bodů)

Počítáte 3 příklady z 5 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 4 (4 body). Nalezněte polynom p nejvýše třetího stupně, pro který platí

$$p(0) = 2, \quad p(1) = 3, \quad p(2) = 12, \quad p(5) = 147.$$

Výsledný polynom uveďte ve tvaru $ax^3 + bx^2 + cx + d$, tj. nalezněte koeficienty a, b, c, d.

Úloha 5 (4 body). Bez použití l'Hospitalova pravidla vyčíslete

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\mathrm{tg}\ 3x}{\sin\ 5x}.$$

Úloha 6 (4 body). Ve kterých bodech je tečna funkce

$$f(x) = y = 2 + x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

rovnoběžná s osou x?

Úloha 7 (4 body). Rozhodněte, zda existuje $a \in \mathbb{R}$ takové, že funkce $a \cdot x + \sin x$ má v bodě $x = \frac{5\pi}{4}$ globální minimum na intervalu $[0, 2\pi]$.

Úloha 8 (4 body). Odhadněte chybu přibližného vzorce

$$\ln(1+x) \doteq x - \frac{x^2}{2}$$

pro obecné $x \in (-1, 0)$.

Část III (celkem 6 bodů)

Odpovídáte na 3 úlohy ze 4 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 9 (2 body). Jaká je *definice* interpolačního polynomu p pro hodnoty $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ v navzájem různých bodech $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$?

Úloha 10 (2 body). Uveďte příklad podmnožiny X množiny $\mathbb{R}$ takové, že pro ni platí

$$\sup X \leq \inf X.$$

Zvláště tedy musí existovat $\sup X$ i $\inf X$.

Úloha 11 (2 body). Určete maximální definiční obor (tj. největší vzhledem k množinové inkluzi podmnožinu $\mathbb{R}$), kde je funkce

$$f(x) = 2x^{21} \cdot \frac{e^{\cos\left(x^2-21\right)+x-256x^3} - 11}{2 + x^{252}}$$

spojitá.

Úloha 12 (2 body). Napište, čemu se rovná

$$(\operatorname{arccotg} x)'.$$

Část I (celkem 12 bodů)

Počítáte všechny 3 příklady!

Úloha 1 (4 body). Uveďte libovolný polynom P splňující tyto podmínky:

$$P(0) = 6; \quad P(1) = 4; \quad P(2) = 4; \quad P'(2) = 1.$$

Slovo „libovolný" přitom znamená „libovolného stupně".

Úloha 2 (4 body). Najděte rovnice tečny a normály ke křivce $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$, tj. ke grafu funkce $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$, v bodě $[-1, 0]$.

Úloha 3 (4 body). Nalezněte všechny (se směrnicí i bez směrnice) asymptoty těchto dvou funkcí:

$$x \cdot e^x; \qquad \frac{(x+3)^3}{(x-2)^3}.$$

Část II (celkem 12 bodů)

Počítáte 3 příklady z 5 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 4 (4 body). Vyjádřete racionální funkci

$$\frac{3x^4 + 2x^3 - x^2 + 1}{3x + 2}$$

jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce. Tj. dělte.

Úloha 5 (4 body). Přímo z definice vlastní limity ve vlastním bodě dokažte, že je

$$\lim_{x \to 0} x^3 - 2 = -2.$$

Úloha 6 (4 body). Vypočtěte

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x.$$

Úloha 7 (4 body). Určete první derivaci funkce

$$\sin\left(\sin\left(\sin x\right)\right).$$

Úloha 8 (4 body). Nechť je dána funkce f a bod z takový, že platí

$$f(z) = 0, \quad f'(z) = 0, \quad f''(z) = 0, \quad f^{(3)}(z) = 1. \qquad (*)$$

Opište ty z výroků (případně napište jen písmena je uvozující)

(a) bod z je stacionárním bodem f,

(b) funkce f není polynomem druhého stupně,

(c) funkce f v bodě z roste,

(d) funkce f nemá v bodě z ostré lokální minimum,

(e) bod z je inflexním bodem funkce f,

které jsou *zcela jistě pravdivé* (tj. platí vždy – tedy pro všechny funkce f splňující $(*)$.)

Odůvodněte, proč jsou podle Vás jednotlivé výroky pravdivé, či nikoli. Zvláště pak uveďte protipříklad, pokud budete tvrdit, že nějaké tvrzení obecně platit nemusí.

Část III (celkem 6 bodů)

Odpovídáte na 3 úlohy ze 4 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 9 (2 body). Nechť jsou zcela libovolně dány hodnoty $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ v navzájem různých bodech $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Pro fundamentální polynomy $l_i, i = 0, 1, \dots, n$ zavedené v souvislosti s výpočtem Lagrangeova interpolačního polynomu (to, jak jsou zavedeny, musíte znát) na celé reálné ose (tj. pro všechna $x \in \mathbb{R}$) platí

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1.$$

Dokažte to!

Úloha 10 (2 body). Existuje funkce ryze monotónní (a tudíž definovaná) na celé reálné ose, která není v nějakém bodě spojitá, ale k ní inverzní funkce je spojitá na celém svém definičním oboru? Odpovězte pouze „ano“, nebo „ne“.

Pokud odpovídáte „ano“, uveďte příklad dokládající správnost Vaší odpovědi.

Úloha 11 (2 body). Rozhodněte, které ze vztahů

(a) $\mathcal{D}(f) \subset \mathcal{D}(f')$,

(b) $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f')$,

(c) $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathcal{D}(f')$,

(d) $\mathcal{D}(f') \subseteq \mathcal{D}(f)$

platí pro *všechny* reálné funkce f. Může platit jeden, dva, tři, všechny, ale také žádný!

Úloha 12 (2 body). Určete $f'(1)$, je-li $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$.

Přemýšlejte, než začnete počítat.

Část I (celkem 12 bodů)

Počítáte všechny 3 příklady!

Úloha 1 (4 body). Rozložte na parciální zlomky racionální funkci

$$\frac{1}{x^3(x+1)}.$$

Úloha 2 (4 body). Určete derivaci funkce $x^{\sin x}$.

Úloha 3 (4 body). Za pomoci diferenciálu přibližně vypočítejte $\sin\left(\frac{29}{180}\pi\right)$. Uvažte přitom, čemu se rovná $\sin\left(\frac{30}{180}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Výsledek nemusíte upravovat (vyčíslovat).

Malá rada: Výpočet musí být prováděn v radiánech, ne ve stupních!

Část II (celkem 12 bodů)

Počítáte 3 příklady z 5 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 4 (4 body). Určete

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\cdot 4^n - 8n^6 - 2^n - 112}{2\cdot 3^{n+12} - 45n - \sqrt{111}\cdot \pi^{n+12}}.$$

Úloha 5 (4 body). Zcela libovolným způsobem potvrďte, že je

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Tedy dokažte, že předešlá rovnost má smysl a platí.

Nejdříve však přemýšlejte. Jde to velmi jednoduše...

Úloha 6 (4 body). Pod jakým úhlem protíná graf funkce $\ln x$ osu x. (Úhlem protnutí, jak je běžné, rozumíme úhel směrového vektoru tečny s kladnou poloosou x v kladném smyslu otáčení v rovině – proti směru pohybu hodinových ručiček – od poloosy k tečně.)

Pokud nedokážete odpovědět, nevadí! Stačí, když uvedete tečnu k dané funkci v bodě protnutí kladné poloosy x.

Úloha 7 (4 body). Využitím Lagrangeovy věty dokažte, že funkce f diferencovatelná v každém reálném bodě s derivací identicky rovnou 0 (tj. $f' \equiv 0$, tj. $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$) je konstantní.

Úloha 8 (4 body). Určete interval, na kterém je funkce e^{-x^2} konkávní.

Část III (celkem 6 bodů)

Odpovídáte na 3 úlohy ze 4 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 9 (2 body). Nechť jsou pevně zadány nějaké body a nějaké hodnoty. Uveďte alespoň 1 zásadní rozdíl (tedy rozdíl z matematického hlediska), který je mezi Hermitovým interpolačním polynomem a Lagrangeovým interpolačním polynomem.

Můžete odpovědět pouze tak, že napíšete: „Není mezi nimi žádný faktický rozdíl. Jeden na druhý lze totiž převést roznásobením.“

Úloha 10 (2 body). Co to znamená, když o racionální lomené funkci prohlásíme, že je *ryze lomenou*?

Úloha 11 (2 body). Uveďte větu „O třech limitách“.

Úloha 12 (2 body). Čemu se rovná

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$$

za předpokladu, že daný výraz existuje a má obvyklý význam?

Část I (celkem 12 bodů)

Počítáte všechny 3 příklady!

Úloha 1 (4 body). Upravte funkci

$$\frac{x^4 + 6x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3}$$

na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce Q. Získanou funkci Q poté vyjádřete ve tvaru součtu tzv. parciálních zlomků.

Úloha 2 (4 body). Spočítejte následující dvě limity

$$\lim_{x \to 0+} x^{\frac{\alpha}{\ln x}},$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{\alpha}{\ln x}},$$

přičemž $\alpha \in \mathbb{R}$ je libovolné.

Úloha 3 (4 body). Nalezněte všechny globální (tj. absolutní) extrémy polynomu $p(x) = x^3 - 3x + 2$ na intervalu $[-3, 2]$.

Část II (celkem 12 bodů)

Počítáte 3 příklady z 5 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 4 (4 body). Stanovte Hermitův interpolační polynom, je-li požadováno:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 1,$$

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 4, \quad y_2 = 1,$$
$$y_0' = 0, \quad y_1' = 4, \quad y_2' = 2.$$

Rada: Přemýšlejte (nejen u té soustavy rovnic)!

Úloha 5 (4 body). Vypočtěte

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}.$$

Úloha 6 (4 body). Určete druhou derivaci funkce tg x. Přitom nemusíte uvádět na jaké reálné podmnožině jste ji určili.

Úloha 7 (4 body). Určete derivaci funkce $y = f(x)$ zadané rovnicí $11y - \cos y = \sin x + 256$.

Úloha 8 (4 body). Určete Taylorův polynom stupně 4 funkce $e^{-\frac{x^2}{2}}$ se středem v počátku (tj. pro $x_0 = 0$).

Část III (celkem 6 bodů)

Odpovídáte na 3 úlohy ze 4 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 9 (2 body). Nechť jsou libovolně zvoleny hodnoty $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ v navzájem různých bodech $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, přičemž $y_0 \neq 0$ a $n \in \mathbb{N}$ je také libovolné. Kolik existuje polynomů stupně

(a) n,

(b) $n + 1$,

(c) $2n$,

jenž nabývají v uvedených bodech zadaných hodnot?

Není-li odpověď jednoznačná, uveďte diskusi (tj. matematický rozbor) vzhledem k dalším Vámi určeným podmínkám.

Úloha 10 (2 body). Uveďte příklad funkce definované na otevřeném intervalu a nějakého bodu jejího definičního oboru, ve kterém nastává tzv. skok. Tuto funkci (samozřejmě) *nemůžete* zadat obrázkem nebo tabulkou!

Úloha 11 (2 body). Napište vzorec pro výpočet derivace inverzní funkce k funkci f (v libovolném bodu $x \in \mathbb{R}$), má-li f na celé reálné ose derivaci a je všude rostoucí (proto má také všude nenulovou derivaci).

Úloha 12 (2 body). Definujte pojem „inflexní bod“.