Druhý zápočtový test – 1. termín

Zadání si ponecháváte. Listy, které odevzdáte, *čitelně* podepište! Doporučuji Vám, abyste pod své jméno uvedli čísla těch dvou úloh, které jste zvolili – neřešili je.

Výsledky 2. testu (tedy i tohoto termínu) se dozvíte e-mailem až ve čtvrtek 26. 4.

Část I (celkem 20 bodů)

Počítáte všech 5 příkladů!

Úloha 1 (4 body). Pro $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ stanovte, čemu je roven výraz $\int \frac{\cos 2x}{(\cos x \cdot \sin x)^2}\, dx$.
Nápověda: Uvažte nejprve, čemu se rovná $\cos 2x$. (Zkouška proběhne bez nápověd.)

Výsledek. Po úpravě využitím rovnosti

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

lze snadno zjistit, že (kde $C \in \mathbb{R}$)

$$\int \frac{\cos 2x}{(\cos x \cdot \sin x)^2}\, dx = \text{-cotg}\ x - \text{tg}\ x + C.$$

□

Úloha 2 (4 body). Je dána funkce $f(x) = |\,x\,|$ na intervalu $I = [-1, 1]$ a dělení $D_n = \{-1, -\frac{n-1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Určete $s(D_n, f)$ a $S(D_n, f)$.
Na základě předešlého výsledku rozhodněte o integrovatelnosti funkce f na I.

Výsledek. Je (viz Příklad 43 z demonstrativních cvičení)

$$s(D_n, f) = \frac{n-1}{n}, \quad S(D_n, f) = \frac{n+1}{n}.$$

Funkce f je integrovatelná na I, neboť

$$\lim_{n\to\infty} s(D_n, f) = \lim_{n\to\infty} S(D_n, f).$$

Viz skriptum doc. Hilschera, str. 70. □

Úloha 3 (4 body). Spočítejte $\int\limits_{-1}^{1} x^2 e^{-x}\,dx$.

Výsledek. Výsledek je $e - 5e^{-1}$. $\square$

Úloha 4 (4 body). Vypočtěte délku oblouku křivky, která je zadána grafem funkce $\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ mezi jejími průsečíky s osou x. Tj. stanovte délku grafu dané funkce na intervalu, jehož krajními body jsou nulové body uvažované funkce.

Výsledek. Výsledek je $2\sqrt{3}$. $\square$

Úloha 5 (4 body). Vyčíslete nevlastní integrál $\int\limits_{-\infty}^{0} x\, e^{-x^2}\,dx$.

Výsledek. Výsledek je $-\frac{1}{2}$. $\square$

Část II (celkem 6 bodů)

Odpovídáte na 2 úlohy ze 3 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 6 (3 body). Vypočítejte $\int\limits_{-e}^{e} \cosh x\,dx$, kde e je Eulerovo číslo, tj. základ přirozených logaritmů.

Výsledek. Výsledek je $e^e - e^{-e}$. $\square$

Úloha 7 (3 body). Určete znaménka těchto tří čísel (hodnot integrálů)

$$\Theta := \int_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx, \quad \Xi := \int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx, \quad \Upsilon := \int_{0}^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Tedy pro každé $j \in \{\Theta, \Xi, \Upsilon\}$ uveďte, zda je $j < 0$, $j > 0$, nebo $j = 0$.

Výsledek. Nebylo třeba cokoli zdůvodňovat: stačilo uvést pouze

$$\Theta > 0, \quad \Xi = 0, \quad \Upsilon > 0.$$

□

Úloha 8 (3 body). Vyjádřete bez symbolů derivace a integrace výraz

$$\left(\int_x^\xi 6t^{-11} e^{6t-11} \, dt \right)'$$

s proměnnou $x \in \mathbb{R}$ a neznámou konstantou $\xi \in \mathbb{R}$.

Výsledek. Platí

$$\left(\int_x^\xi 6t^{-11} e^{6t-11} \, dt \right)' = -6x^{-11} e^{6x-11}.$$

Viz skriptum doc. Hilschera, str. 80, dole. □

Část III (celkem 4 body)

Odpovídáte na 2 úlohy ze 3 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 9 (2 body). Udejte příklad funkce spojité a ohraničené na celém svém definičním oboru, jímž je nějaký omezený (tj. ohraničený) otevřený interval I (ten samozřejmě rovněž musíte uvést), takové, že k ní na I *neexistuje* nekonečně mnoho navzájem různých (tj. lišících se v alespoň jednom bodě množiny I) primitivních funkcí.

Výsledek. Taková funkce neexistuje: viz skriptum doc. Hilschera, str. 59. □

Úloha 10 (2 body). Dokažte, že pro spojité funkce f a g na uvažované (leč blíže neupřesněné) množině M (tj. pro $x \in M$) platí

$$\int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx = \int (f(x) - g(x)) \, dx.$$

Výsledek. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 61. □

Úloha 11 (2 body). Uveďte vzorce pro objem a obsah pláště rotačního tělesa vzniklého rotací plochy mezi Gr f a osou x na intervalu $[0, 1]$ kolem osy x, je-li f nezápornou funkcí se spojitou derivací na $[0, 1]$.

Výsledek. Viz skriptum doc. Hilschera – Tvrzení 8 na str. 87 a Tvrzení 9 na str. 89. □

Druhý zápočtový test – 2. termín

Zadání si ponecháváte. Listy, které odevzdáte, *čitelně* podepište! Doporučuji Vám, abyste pod své jméno uvedli čísla těch dvou úloh, které jste zvolili – neřešili je.

Výsledky 2. testu (tedy i tohoto termínu) se dozvíte e-mailem až ve čtvrtek 26. 4.

Část I (celkem 20 bodů)

Počítáte všech 5 příkladů!

Úloha 1 (4 body). Pro $x > 0$ nalezněte k funkci $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}} + 2^x$ nějakou primitivní funkci.

Výsledek. Hledanou funkcí je např.

$$\frac{4(x^2+7)}{7x^{\frac{1}{4}}} + \frac{2^x}{\ln 2} - 145,11.$$

□

Úloha 2 (4 body). Pro $x > 0$ spočítejte $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx$.

Výsledek. Je

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{e^x-1}{e^x+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

□

Úloha 3 (4 body). Pomocí výpočtu limity dolních součtů určete $\int\limits_0^1 x^2\,dx$. (Víte, že je funkce x^2 integrovatelná na $[0,1]$.)

Uvažujte přitom tzv. ekvidistantní dělení $D_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ intervalu $[0,1]$.

Rada: Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Výsledek. Výsledek je

$$\lim_{n\to\infty} s(D_n, x^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n}) = \frac{1}{3}.$$

Poznámka: Integrovatelnost funkce x^2 na $[0,1]$ plyne z její spojitosti. $\square$

Úloha 4 (4 body). Nechť C je křivka v rovině s parametrizací $[x(t), y(t)]$ pro $t \in [0, \pi]$. Určete délku d křivky C, je-li $x(t) = \cos t + t \sin t$, $y(t) = \sin t - t \cos t$.

Výsledek. Snadno se spočítá, že

$$d = \frac{\pi^2}{2}.$$

$\square$

Úloha 5 (4 body). Vypočítejte $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Výsledek. Výsledek je $\frac{\pi}{4}$. $\square$

Část II (celkem 6 bodů)

Odpovídáte na 2 úlohy ze 3 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 6 (3 body). Čemu se rovná $\int \frac{1}{(x-2)^2+9}\,dx$?

Výsledek. Je

$$\int \frac{1}{(x-2)^2+9}\,dx \;=\; \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,\frac{x-2}{3} + C.$$

$\square$

Úloha 7 (3 body). Vypočítejte $\int\limits_{-0,11}^{0,11} \mathrm{tg}\, x\, dx$. Rada: Nepočítejte; přemýšlejte!

Výsledek. Výsledek je 0. Funkce $\mathrm{tg}\, x$ je totiž lichá. $\square$

Úloha 8 (3 body). Víme, že platí (tzv. 1. věta o střední hodnotě):

Nechť jsou f a g spojité funkce na intervalu $I = [a, b]$ nenulové délky, přičemž g nemění znaménko (tj. je na I nezáporná, nebo nekladná). Potom existuje takové $c \in I$, pro které je

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Za pomoci této věty odhadněte integrál (tj. uveďte interval J, ve kterém se nachází jeho hodnota: určitý integrál je číslo)

$$\mathcal{I} := \int\limits_0^1 \frac{x^{99}}{\sqrt{1+x}}\,dx$$

s chybou ostře menší než 0,01 (tj. délka intervalu J musí být menší než 0,01).

Výsledek. Lehce se ukáže (volbou $g = x^{99}$), že

$$\mathcal{I} \in \left[\frac{1}{100\sqrt{2}}, \frac{1}{100}\right].$$

Dokonce lze nenáročně dokázat, že

$$\mathcal{I} \in \left(\frac{1}{100\sqrt{2}}, \frac{1}{100}\right).$$

$\square$

Část III (celkem 4 body)

Odpovídáte na 2 úlohy ze 3 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 9 (2 body). Neurčitý integrál z nějaké na $\mathbb{R}$ spojité funkce f je:

(a) reálné číslo, nebo $+\infty$, či -∞;

(b) nekonečná množina;

(c) jedna funkce vzniklá z jiné posunutím o konstantu;

(d) symbol označující obsah plochy mezi osou x a funkcí f.

Napovězme, že správná je alespoň jedna z možností.

Výsledek. Správně je pouze „za (b)“. Viz skriptum doc. Hilschera, str. 60. ☐

Úloha 10 (2 body). Uveďte příklad funkce, která je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$, ale není integrovatelná na žádném intervalu $[a, b]$ pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Výsledek. Uvažte funkci, která v racionálních číslech nabývá hodnoty 3 a v iracionálních je nulová. ☐

Úloha 11 (2 body). Napište Newton-Leibnizův vzorec včetně všech příslušných podmínek na v něm vyskytující se funkce.

Výsledek. Viz skriptum doc. Hilschera, Věta 37 na str. 81. ☐

Druhý zápočtový test – 3. termín

Zadání si ponecháváte. Listy, které odevzdáte, *čitelně* podepište! Doporučuji Vám, abyste pod své jméno uvedli čísla těch dvou úloh, které jste zvolili – neřešili je.

Výsledky 2. testu (tedy i tohoto termínu) se dozvíte e-mailem až ve čtvrtek 26. 4.

Část I (celkem 20 bodů)

Počítáte všech 5 příkladů!

Úloha 1 (4 body). Vypočtěte $\int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)^2}\,dx$

Výsledek. Výsledek je

$$\int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{4}{x-2}\,dx + \int \frac{8}{(x-2)^2}\,dx +$$

$$+ \int 1\,dx = \ln\left(|\,x-1\,|\,(x-2)^4\right) - \frac{8}{x-2} + x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

□

Úloha 2 (4 body). Vypočítejte $\int\limits_0^1 x^{15} \cdot \sqrt{1+3x^8}\,dx$. Výsledek uveďte ve tvaru zlomku.

Výsledek. Je

$$\int\limits_0^1 x^{15} \cdot \sqrt{1+3x^8}\,dx = \frac{29}{270}.$$

□

Úloha 3 (4 body). Určete obsah rovinného obrazce omezeného křivkami $y = e^x - 1$, $y = e^{2x} - 3$, $x = 0$.

Výsledek. Výsledek je $2\ln 2 - \frac{1}{2}$. □

Úloha 4 (4 body). Pro jaká $p \in \mathbb{R}$ konverguje integrál $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(x+111)^p}\,dx$?

Výsledek. Zkoumaný integrál konverguje právě pro $p > 1$. $\square$

Úloha 5 (4 body). Určete plochu (tj. obsah oblasti) mezi grafem funkce $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a osou x na intervalu (-1, 1).

Výsledek. Výsledek je π. Viz skriptum doc. Hilschera – Příklad 126 na str. 94. $\square$

Část II (celkem 6 bodů)

Odpovídáte na 2 úlohy ze 3 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 6 (3 body). Právě dvě z funkcí (definovaných pro $x > 0$)

$$f(x) = \sin 5x, \quad g(x) = \frac{\sin 5x}{5x}, \quad h(x) = \frac{1}{\ln 5x}, \quad u(x) = \sinh 5x, \quad v(x) = \frac{-1892 \cos 5x}{5 + \sin 5x}$$

mají primitivní funkci, která je vyšší funkcí (tj. není vyjádřitelná pomocí elementárních funkcí). Uveďte tyto dvě funkce.

Výsledek. Vylučovací metodou lze zjistit, že hledanou dvojicí funkcí je g, h. $\square$

Úloha 7 (3 body). Vypočítejte $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$.
Rada: Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. (Ve zkouškové písemce rady nebudou!)

Výsledek. Výsledek je $\frac{\pi}{4}$. $\square$

Úloha 8 (3 body). Určete průměrnou hodnotu funkce $\sqrt{x}$ na intervalu $[0, 100]$.

Výsledek. Výsledek je
$$\frac{20}{3}.$$
□

Část III (celkem 4 body)

Odpovídáte na 2 úlohy ze 3 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 9 (2 body). Za pomoci derivací uvažovaných funkcí (jiný způsob nebude uznán) dokažte, že
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Přitom lze (není nutné) využít možnost „derivování předpokládané rovnosti".

Výsledek. Viz např. skriptum doc. Hilschera, str. 59–60. □

Úloha 10 (2 body). Opište ty z výroků (přičemž $I = [a, b]$, $a < b$)

(a) ohraničená, monotónní funkce na I je na I integrovatelná,

(b) funkce spojitá na I nabývá své průměrné hodnoty na I v nějakém bodě I,

(c) funkce $F(x) := \int\limits_x^a f$ je spojitá na I pro libovolnou funkci f integrovatelnou na I,

(d) součinem dvou integrovatelných funkcí na I je funkce integrovatelná na I,

(e) podílem dvou integrovatelných funkcí na I je funkce integrovatelná na I

jenž *vždy* (pro všechny zmíněné funkce) platí.

Výsledek. S výjimkou tvrzení (e) platí všechna tvrzení. Viz skriptum doc. Hilschera – po řadě Věta 30, (ii) na str. 72; Poznámka 27 na str. 77; Věta 35 na str. 78 a Poznámka 26, (iii) na str. 74; Věta 32, (v) na str. 73; Věta 32, (vi) na str. 73. □

Úloha 11 (2 body). Napište větu O střední hodnotě integrálního počtu pro spojitou funkci f na intervalu $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Výsledek. Viz skriptum doc. Hilschera – Věta 33, (ii) na str. 76. □

Druhý zápočtový test – 4. termín

Zadání si ponecháváte. Listy, které odevzdáte, *čitelně* podepište! Doporučuji Vám, abyste pod své jméno uvedli čísla těch dvou úloh, které jste zvolili – neřešili je.

Výsledky 2. testu (tedy i tohoto termínu) se dozvíte e-mailem až ve čtvrtek 26. 4.

Část I (celkem 20 bodů)

Počítáte všech 5 příkladů!

Úloha 1 (4 body). Vypočtěte $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

Výsledek. Zřejmě je ($C \in \mathbb{R}$)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = 2\sqrt{1+\ln x} + C.$$

$\square$

Úloha 2 (4 body). Integrací per partes spočtěte $\int\limits_0^{\pi} x \sin x \, dx$ a $\int\limits_0^{\ln 2} x \, e^{-x} \, dx$.

Výsledek. Je

$$\int\limits_0^{\pi} x \sin x \, dx = \pi, \qquad \int\limits_0^{\ln 2} x \, e^{-x} \, dx = \frac{1}{2} \ln \frac{e}{2}.$$

$\square$

Úloha 3 (4 body). Vypočítejte obsah ohraničené oblasti, jejíž hranici tvoří parabola $-x^2 + 4x - 3$ a její tečny v bodech $[0; -3]$ a $[3; 0]$. Nakreslete obrázek. Napovězme, že tečny se protínají v bodě $[1,5; 3]$ a jejich rovnice jsou $y = 4x - 3$, $y = -2(x - 3)$. (Ve zkouškové písemce nebude nic napovězeno.)

Výsledek. Výsledek je $\frac{9}{4}$. $\square$

Úloha 4 (4 body). Stanovte objem tělesa, jehož plášť vznikl otáčením křivky $y^2 = 2bx$, $x \in [0, c]$ kolem osy x, přičemž $c, b \in \mathbb{R}$, $c > b > 0$.

Výsledek. Výsledek je πbc^2. □

Úloha 5 (4 body). Vypočítejte $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x}$.

Výsledek. Výsledek je $\frac{1}{2}\ln 2$. □

Část II (celkem 6 bodů)

Odpovídáte na 2 úlohy ze 3 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 6 (3 body). Dle jistého vzorce doplňte $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \cdots$ pro $x \in \mathbb{R}$.
Možná nápověda: Uvažte derivace funkcí inverzních k funkcím hyperbolickým.

Výsledek. Jak zaznělo na cvičení, je ($C \in \mathbb{R}$)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{argsinh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.$$

Mělo by být doplněno, že postačovalo uvést jednu z rovností. □

Úloha 7 (3 body). Určete $\int\limits_0^2 |\, x - 2 \,| \; dx$.
Rada: Můžete si pomoci tím, že uvážíte geometrický význam integrálu.

Výsledek. Výsledek je 2. □

Úloha 8 (3 body). Který z integrálů (vlastně, které z čísel)

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x \, dx, \qquad \int\limits_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

je větší? Nebo si jsou rovny (rovna)? Nestačí pouze odpovědět, ale je třeba i odpověď náležitě zdůvodnit (tj. uvést „proč je to tak – z čeho to vyplývá“).

Výsledek. Platí
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x \, dx < \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx.$$
□

Část III (celkem 4 body)

Odpovídáte na 2 úlohy ze 3 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

Úloha 9 (2 body). Uveďte alespoň jednu funkci g, která je definována na celé reálné přímce, existuje k ní na $\mathbb{R}$ funkce primitivní, ale přitom g není všude (tj. na celém svém definičním oboru $\mathbb{R}$) spojitá.

Pokud tvrdíte, že taková funkce nemůže existovat, napište pouze „neexistuje“.

Výsledek. Existuje: viz skriptum doc. Hilschera, str. 59. □

Úloha 10 (2 body). Jak je definována průměrná hodnota integrovatelné funkce f na intervalu $[a, b]$? (Reálná čísla a, b jsou libovolná; pouze požadujeme, aby $a < b$.)

Výsledek. Viz skriptum doc. Hilschera – Definice 21 na str. 75. □

Úloha 11 (2 body). Nechť je funkce f definována na intervalu $(-\infty, \infty)$ a ohraničená na každém jeho ohraničeném podintervalu. (Bez újmy na obecnosti můžete předpokládat, že je ohraničená na celém $\mathbb{R}$). Kdy řekneme, že integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ konverguje, a kdy, že diverguje?

Výsledek. Viz skriptum doc. Hilschera – Definice 22 na str. 91 a druhý odstavec Poznámky 30 na str. 92. □