# Druhý zápočtový test – 1. termín

Zadání si ponecháváte. Listy, které odevzdáte, *čitelně* podepište! Doporučuji Vám, abyste pod své jméno uvedli čísla těch dvou úloh, které jste zvolili – neřešili je.

Výsledky 2. testu (tedy i tohoto termínu) se dozvíte e-mailem až ve čtvrtek 26. 4.

## Část I (celkem 20 bodů)

Počítáte všech 5 příkladů!

**Úloha 1 (4 body).** Pro $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ stanovte, čemu je roven výraz $\int \frac{\cos 2x}{(\cos x \cdot \sin x)^2}\,dx$.
Nápověda: Uvažte nejprve, čemu se rovná $\cos 2x$. (Zkouška proběhne bez nápověd.)

**Úloha 2 (4 body).** Je dána funkce $f(x) = |\,x\,|$ na intervalu $I = [\text{-}1, 1]$ a dělení $D_n = \{\text{-}1, \text{-}\frac{n-1}{n}, \ldots, \text{-}\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Určete $s(D_n, f)$ a $S(D_n, f)$.
*Na základě předešlého výsledku* rozhodněte o integrovatelnosti funkce $f$ na $I$.

**Úloha 3 (4 body).** Spočítejte $\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x}\,dx$.

**Úloha 4 (4 body).** Vypočtěte délku oblouku křivky, která je zadána grafem funkce $\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ mezi jejími průsečíky s osou $x$. Tj. stanovte délku grafu dané funkce na intervalu, jehož krajními body jsou nulové body uvažované funkce.

**Úloha 5 (4 body).** Vyčíslete nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{0} x\,e^{-x^2}\,dx$.

## Část II (celkem 6 bodů)

Odpovídáte na 2 úlohy ze 3 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

**Úloha 6 (3 body).** Vypočítejte $\int_{-e}^{e} \cosh x\,dx$, kde $e$ je Eulerovo číslo, tj. základ přirozených logaritmů.

**Úloha 7 (3 body).** Určete znaménka těchto tří čísel (hodnot integrálů)

$$\Theta := \int_{-2}^{2} x^3 2^x \, dx, \quad \Xi := \int_{0}^{2\pi} \sin x \, dx, \quad \Upsilon := \int_{0}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

Tedy pro každé $j \in \{\Theta, \Xi, \Upsilon\}$ uveďte, zda je $j < 0$, $j > 0$, nebo $j = 0$.

**Úloha 8 (3 body).** Vyjádřete bez symbolů derivace a integrace výraz

$$\left( \int_{x}^{\xi} 6t^{-11} e^{6t-11} \, dt \right)'$$

s proměnnou $x \in \mathbb{R}$ a neznámou konstantou $\xi \in \mathbb{R}$.

## Část III (celkem 4 body)

Odpovídáte na 2 úlohy ze 3 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

**Úloha 9 (2 body).** Udejte příklad funkce spojité a ohraničené na celém svém definičním oboru, jímž je nějaký omezený (tj. ohraničený) otevřený interval $I$ (ten samozřejmě rovněž musíte uvést), takové, že k ní na $I$ *neexistuje* nekonečně mnoho navzájem různých (tj. lišících se v alespoň jednom bodě množiny $I$) primitivních funkcí.

**Úloha 10 (2 body).** Dokažte, že pro spojité funkce $f$ a $g$ na uvažované (leč blíže neupřesněné) množině $M$ (tj. pro $x \in M$) platí

$$\int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx = \int (f(x) - g(x)) \, dx.$$

**Úloha 11 (2 body).** Uveďte vzorce pro objem a obsah pláště rotačního tělesa vzniklého rotací plochy mezi $\mathrm{Gr}\, f$ a osou $x$ na intervalu $[0, 1]$ kolem osy $x$, je-li $f$ nezápornou funkcí se spojitou derivací na $[0, 1]$.

# Druhý zápočtový test – 2. termín

Zadání si ponecháváte. Listy, které odevzdáte, *čitelně* podepište! Doporučuji Vám, abyste pod své jméno uvedli čísla těch dvou úloh, které jste zvolili – neřešili je.

Výsledky 2. testu (tedy i tohoto termínu) se dozvíte e-mailem až ve čtvrtek 26. 4.

## Část I (celkem 20 bodů)

Počítáte všech 5 příkladů!

**Úloha 1 (4 body).** Pro $x > 0$ nalezněte k funkci $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}} + 2^x$ nějakou primitivní funkci.

**Úloha 2 (4 body).** Pro $x > 0$ spočítejte $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx$.

**Úloha 3 (4 body).** Pomocí výpočtu limity dolních součtů určete $\int\limits_0^1 x^2\,dx$. (Víte, že je funkce $x^2$ integrovatelná na $[0,1]$.)

Uvažujte přitom tzv. ekvidistantní dělení $D_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ intervalu $[0,1]$.

Rada: Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

**Úloha 4 (4 body).** Nechť $C$ je křivka v rovině s parametrizací $[x(t), y(t)]$ pro $t \in [0,\pi]$. Určete délku $d$ křivky $C$, je-li $x(t) = \cos t + t\sin t$, $y(t) = \sin t - t\cos t$.

**Úloha 5 (4 body).** Vypočítejte $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

## Část II (celkem 6 bodů)

Odpovídáte na 2 úlohy ze 3 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

**Úloha 6 (3 body).** Čemu se rovná $\int \frac{1}{(x-2)^2+9}\,dx$?

**Úloha 7 (3 body).** Vypočítejte $\int\limits_{-0{,}11}^{0{,}11} \operatorname{tg} x \, dx$. Rada: Nepočítejte; přemýšlejte!

**Úloha 8 (3 body).** Víme, že platí (tzv. 1. věta o střední hodnotě):

Nechť jsou $f$ a $g$ spojité funkce na intervalu $I = [a, b]$ nenulové délky, přičemž $g$ nemění znaménko (tj. je na $I$ nezáporná, nebo nekladná). Potom existuje takové $c \in I$, pro které je

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Za pomoci této věty odhadněte integrál (tj. uveďte interval $J$, ve kterém se nachází jeho hodnota: určitý integrál je číslo)

$$\mathcal{I} := \int\limits_0^1 \frac{x^{99}}{\sqrt{1+x}}\,dx$$

s chybou ostře menší než 0,01 (tj. délka intervalu $J$ musí být menší než 0,01).

## Část III (celkem 4 body)

Odpovídáte na 2 úlohy ze 3 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

**Úloha 9 (2 body).** Neurčitý integrál z nějaké na $\mathbb{R}$ spojité funkce $f$ je:

(a) reálné číslo, nebo $+\infty$, či $-\infty$;

(b) nekonečná množina;

(c) jedna funkce vzniklá z jiné posunutím o konstantu;

(d) symbol označující obsah plochy mezi osou $x$ a funkcí $f$.

Napovězme, že správná je alespoň jedna z možností.

**Úloha 10 (2 body).** Uveďte příklad funkce, která je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$, ale není integrovatelná na žádném intervalu $[a, b]$ pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

**Úloha 11 (2 body).** Napište Newton-Leibnizův vzorec včetně všech příslušných podmínek na v něm vyskytující se funkce.

# Druhý zápočtový test – 3. termín

Zadání si ponecháváte. Listy, které odevzdáte, *čitelně* podepište! Doporučuji Vám, abyste pod své jméno uvedli čísla těch dvou úloh, které jste zvolili – neřešili je.

Výsledky 2. testu (tedy i tohoto termínu) se dozvíte e-mailem až ve čtvrtek 26. 4.

## Část I (celkem 20 bodů)

Počítáte všech 5 příkladů!

**Úloha 1 (4 body).** Vypočtěte $\int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)^2}\,dx$

**Úloha 2 (4 body).** Vypočítejte $\int\limits_0^1 x^{15} \cdot \sqrt{1+3x^8}\,dx$. Výsledek uveďte ve tvaru zlomku.

**Úloha 3 (4 body).** Určete obsah rovinného obrazce omezeného křivkami $y = e^x - 1$, $y = e^{2x} - 3$, $x = 0$.

**Úloha 4 (4 body).** Pro jaká $p \in \mathbb{R}$ konverguje integrál $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(x+111)^p}\,dx$?

**Úloha 5 (4 body).** Určete plochu (tj. obsah oblasti) mezi grafem funkce $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a osou $x$ na intervalu (-1, 1).

## Část II (celkem 6 bodů)

Odpovídáte na 2 úlohy ze 3 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

**Úloha 6 (3 body).** Právě dvě z funkcí (definovaných pro $x > 0$)

$$f(x) = \sin 5x, \quad g(x) = \frac{\sin 5x}{5x}, \quad h(x) = \frac{1}{\ln 5x}, \quad u(x) = \sinh 5x, \quad v(x) = \frac{-1892\cos 5x}{5+\sin 5x}$$

mají primitivní funkci, která je vyšší funkcí (tj. není vyjádřitelná pomocí elementárních funkcí). Uveďte tyto dvě funkce.

**Úloha 7 (3 body).** Vypočítejte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$.

Rada: Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. (Ve zkouškové písemce rady nebudou!)

**Úloha 8 (3 body).** Určete průměrnou hodnotu funkce $\sqrt{x}$ na intervalu $[0, 100]$.

## Část III (celkem 4 body)

Odpovídáte na 2 úlohy ze 3 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

**Úloha 9 (2 body).** Za pomoci derivací uvažovaných funkcí (jiný způsob nebude uznán) dokažte, že

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Přitom lze (není nutné) využít možnost „derivování předpokládané rovnosti“.

**Úloha 10 (2 body).** Opište ty z výroků (přičemž $I = [a, b]$, $a < b$)

(a) ohraničená, monotónní funkce na $I$ je na $I$ integrovatelná,

(b) funkce spojitá na $I$ nabývá své průměrné hodnoty na $I$ v nějakém bodě $I$,

(c) funkce $F(x) := \int_x^a f$ je spojitá na $I$ pro libovolnou funkci $f$ integrovatelnou na $I$,

(d) součinem dvou integrovatelných funkcí na $I$ je funkce integrovatelná na $I$,

(e) podílem dvou integrovatelných funkcí na $I$ je funkce integrovatelná na $I$

jenž *vždy* (pro všechny zmíněné funkce) platí.

**Úloha 11 (2 body).** Napište větu O střední hodnotě integrálního počtu pro spojitou funkci $f$ na intervalu $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

# Druhý zápočtový test – 4. termín

Zadání si ponecháváte. Listy, které odevzdáte, *čitelně* podepište! Doporučuji Vám, abyste pod své jméno uvedli čísla těch dvou úloh, které jste zvolili – neřešili je.

Výsledky 2. testu (tedy i tohoto termínu) se dozvíte e-mailem až ve čtvrtek 26. 4.

## Část I (celkem 20 bodů)

Počítáte všech 5 příkladů!

**Úloha 1 (4 body).** Vypočtěte $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

**Úloha 2 (4 body).** Integrací per partes spočtěte $\int\limits_0^{\pi} x \sin x \, dx$ a $\int\limits_0^{\ln 2} x\, e^{-x} \, dx$.

**Úloha 3 (4 body).** Vypočítejte obsah ohraničené oblasti, jejíž hranici tvoří parabola $-x^2 + 4x - 3$ a její tečny v bodech $[0; -3]$ a $[3; 0]$. Nakreslete obrázek. Napovězme, že tečny se protínají v bodě $[1,5; 3]$ a jejich rovnice jsou $y = 4x - 3$, $y = -2(x - 3)$. (Ve zkouškové písemce nebude nic napovězeno.)

**Úloha 4 (4 body).** Stanovte objem tělesa, jehož plášť vznikl otáčením křivky $y^2 = 2bx$, $x \in [0, c]$ kolem osy $x$, přičemž $c, b \in \mathbb{R}$, $c > b > 0$.

**Úloha 5 (4 body).** Vypočítejte $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x}$.

## Část II (celkem 6 bodů)

Odpovídáte na 2 úlohy ze 3 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

**Úloha 6 (3 body).** Dle jistého vzorce doplňte $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \cdots$ pro $x \in \mathbb{R}$.
Možná nápověda: Uvažte derivace funkcí inverzních k funkcím hyperbolickým.

**Úloha 7 (3 body).** Určete $\int\limits_0^2 |\, x - 2\,|\ dx$.

Rada: Můžete si pomoci tím, že uvážíte geometrický význam integrálu.

**Úloha 8 (3 body).** Který z integrálů (vlastně, které z čísel)

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\, dx, \qquad \int\limits_0^{\pi} \sin^2 x\, dx$$

je větší? Nebo si jsou rovny (rovna)? Nestačí pouze odpovědět, ale je třeba i odpověď náležitě zdůvodnit (tj. uvést „proč je to tak – z čeho to vyplývá“).

## Část III (celkem 4 body)

Odpovídáte na 2 úlohy ze 3 (nebo méně, *ne však více*) dle vlastní volby!

**Úloha 9 (2 body).** Uveďte alespoň jednu funkci $g$, která je definována na celé reálné přímce, existuje k ní na $\mathbb{R}$ funkce primitivní, ale přitom $g$ není všude (tj. na celém svém definičním oboru $\mathbb{R}$) spojitá.

Pokud tvrdíte, že taková funkce nemůže existovat, napište pouze „neexistuje“.

**Úloha 10 (2 body).** Jak je definována průměrná hodnota integrovatelné funkce $f$ na intervalu $[a, b]$? (Reálná čísla $a, b$ jsou libovolná; pouze požadujeme, aby $a < b$.)

**Úloha 11 (2 body).** Nechť je funkce $f$ definována na intervalu $(-\infty, \infty)$ a ohraničená na každém jeho ohraničeném podintervalu. (Bez újmy na obecnosti můžete předpokládat, že je ohraničená na celém $\mathbb{R}$). Kdy řekneme, že integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ konverguje, a kdy, že diverguje?