Dodatečný zápočtový test – 1. termín

Zadání Vám zůstává. Odevzdáváte pouze přiložený list, kde pouze vyplníte: Vaše jméno, UČO a za pod sebou napsaná čísla $1, 2, \ldots, 14, 15$ uvedete výsledky příslušných příkladů, tj. Vaše odpovědi v podobě osamoceného (nejvýše jednoho) výsledku bez jakýchkoli komentářů či poznámek! (Tři příklady budou uvedeny na tabuli.) Pokud jste nějaký příklad neřešili, odpovídající řádek proškrtněte. Poté se podepište!

Počítat máte nejvýše 12 příkladů dle vlastní volby! Tedy alespoň tři řádky musíte proškrtnout!

Příklad 1 (5 bodů). Vyjádřete racionální ryze lomenou funkci

$$\frac{2x^3 + 6x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3}$$

ve tvaru tzv. parciálních zlomků.

Výsledek. Platí

$$\frac{2x^3 + 6x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x} + \frac{5}{x - 2}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. □

Příklad 2 (5 bodů). Spočtěte

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}.$$

Výsledek. Je

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

□

Příklad 3 (5 bodů). Určete maximální hodnotu, jež v nějakém reálném bodě nabývá funkce $\sqrt[3]{x}e^{-x}$. Případně uveďte pouhé „neexistuje“.

Výsledek. Výsledek je

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3e}}.$$

□

Příklad 4 (5 bodů). Napište Taylorův polynom třetího stupně funkce $x^3 - 2x + 5$ v bodě $x_0 = 1$.

Výsledek. Hledaným polynomem je

$$(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + (x-1) + 4.$$

□

Příklad 5 (5 bodů). Například pomocí metody per partes určete

$$\int x \cdot \ln^2 x \, dx.$$

Uvažujte pouze $x > 0$.

Výsledek. Lze spočítat, že

$$\int x \cdot \ln^2 x \, dx = \frac{x^2}{4}(2\ln^2 x - 2\ln\, x + 1) + C.$$

□

Příklad 6 (5 bodů). Vyčíslete nevlastní integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 1} \, dx.$$

Výsledek. Je $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1} \, dx = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi.$ □

Příklad 7 (5 bodů). Sečtěte konvergentní řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Výsledek. Pomocí rozkladu na parciální zlomky lze ukázat, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = -\frac{1}{2}.$$

□

Příklad 8 (5 bodů). Rozhodněte, zda řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ (-1)$^{n-1}$tg $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ konverguje absolutně, nebo relativně, nebo zda diverguje k $+\infty$, resp. k -∞, či dokonce osciluje. Uveďte právě jednu z uvedených možností.

Výsledek. Uvažovaná řada konverguje absolutně. □

Příklad 9 (5 bodů). Určete poloměr konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2\sqrt{n}}$.

Výsledek. Poloměr konvergence dané řady je 1. □

Příklad 10 (5 bodů). Funkci e^x vyjádřete jako nekonečný polynom se členy

$$a_n(x-1)^n.$$

Výsledek. Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$e^x = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}.$$

□

Příklad 11 (5 bodů). Pomocí vhodného rozvoje stanovte kosinus v bodě $x = \frac{\pi}{200}$ s chybou menší než 10^{-6}. Výsledek můžete pochopitelně ponechat v neupravené podobě!

Výsledek. Přesnější výsledek, než je požadováno, je 0,9998766325. □

Příklad 12 (5 bodů). Nalezněte všechna (i konstantní) řešení rovnice

$$y' \cos^2 x = \left(1 + \cos^2 x\right) \cdot \sqrt{1 - y^2}.$$

Výsledek. Výsledek je ($c \in \mathbb{R}$)

$$y = \sin(x + \operatorname{tg} x + c), \qquad y = \pm 1.$$

□

Dodatečný zápočtový test – 2. termín

Zadání Vám zůstává. Odevzdáváte pouze přiložený list, kde pouze vyplníte: Vaše jméno, UČO a za pod sebou napsaná čísla $1, 2, \ldots, 14, 15$ uvedete výsledky příslušných příkladů, tj. Vaše odpovědi v podobě osamoceného (nejvýše jednoho) výsledku bez jakýchkoli komentářů či poznámek! (Tři příklady budou uvedeny na tabuli.) Pokud jste nějaký příklad neřešili, odpovídající řádek proškrtněte. Poté se podepište!

Počítat máte nejvýše 12 příkladů dle vlastní volby! Tedy alespoň tři řádky musíte proškrtnout!

Příklad 1 (5 bodů). Nalezněte polynom nejvýše třetího stupně, který v bodě 1 nabývá hodnoty 4, v bodě 2 hodnoty 9 a jenž má v bodě 0 derivaci rovnu -2, zatímco v bodě 1 je jeho derivace rovna 1.

Výsledek. Hledaným polynomem je

$$x^3 - 2x + 5.$$

□

Příklad 2 (5 bodů). Spočtěte

$$\lim_{x \to +\infty} x \left(3^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}} \right).$$

Výsledek. Je

$$\lim_{x \to +\infty} x \left(3^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}} \right) = \ln \frac{3}{2}.$$

□

Příklad 3 (5 bodů). Pro $x > e$ stanovte počet nulových bodů (tj. bodů, ve kterých nabývá hodnoty 0) derivace $g := f'$ funkce

$$f(x) := \operatorname{arctg} \frac{\ln (x)}{\ln (x) - 1}.$$

Výsledek. Funkce g je na daném intervalu záporná: výsledek je 0. □

Příklad 4 (5 bodů). Za pomoci diferenciálu přibližně vypočítejte arccotg $1,02$.

Výsledek. Je

$$\operatorname{arccotg} 1,02 \doteq \frac{\pi}{4} - 0,01.$$

□

Příklad 5 (5 bodů). Určete pro $x > 0$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\, dx.$$

Výsledek. Platí (kde $C \in \mathbb{R}$)

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\, dx = x - 2\sqrt{x} + 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C.$$

□

Příklad 6 (5 bodů). Vypočtěte délku grafu funkce

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

na intervalu $[-1, 2]$.

Výsledek. Délka grafu f na $[-1, 2]$ činí

$$\frac{1}{2}(e^2 + e - e^{-2} - e^{-1}).$$

□

Příklad 7 (5 bodů). Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^{2n-1}} + \frac{2}{4^{2n}} \right).$$

Výsledek. Je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^{2n-1}}+\frac{2}{4^{2n}}\right)=\frac{14}{15}.$$

□

Příklad 8 (5 bodů). Určete všechna reálná $A \geq 0$, pro která $\sum\limits_{n=100}^{\infty}(\text{-}1)^n \ln\left(1+A^{2n}\right)$ konverguje. Doplňme, že jsou to právě ta $A \geq 0$, pro která uvažovaná řada konverguje absolutně.

Výsledek. Daná řada (absolutně, a tedy i relativně) konverguje pro $A \in [0,1)$. □

Příklad 9 (5 bodů). Uveďte funkci, jejíž Taylorova řada je

$$y-\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}-\cdots,$$

přičemž $y \in [\text{-}1,1]$.

Výsledek. Hledanou funkcí je $\operatorname{arctg} y$. □

Příklad 10 (5 bodů). Rozviňte funkci $\frac{1}{3-2x}$ v Maclaurinovu (tj. Taylorovu se středem v počátku) řadu.

Výsledek. Výsledek je

$$\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}x^n.$$

□

Příklad 11 (5 bodů). Najděte mocninný rozvoj funkce

$$\int_0^x e^{\text{-}t^2}\,dt.$$

Výsledek. Hledaným rozvojem je

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\text{-}1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

□

Příklad 12 (5 bodů). Vyřešte

$$y' - 3x^2 y = (x+2)\, e^{x^3}.$$

Výsledek. Řešeními zadané diferenciální rovnice jsou

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + 2x + c \right) e^{x^3},$$

kde $c \in \mathbb{R}$. □