$f: S^k \to S^k \quad f(\sigma) = \sigma^2$ není homomorf.:

pokud $k \geq 3$ volme $\sigma_1 = (1,2)$, $\sigma_2 = (2,3)$

$$(1,3,2) = f((1,2,3)) = f(\sigma_1 \circ \sigma_2) \overset{?}{=} f(\sigma_1) \circ f(\sigma_2) = Id \circ Id = Id$$

Pro m, n nesoudělná je

$$\underline{\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)}$$

$\varphi(p) = p - 1$ $\quad$ p prvočíslo

$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$

Pro $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ píšeme
$a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow m \mid a-b$

$x^m - y^m = (x-y)\cdot$

Příklad: $a = 2$ $m = 15$
$2^8 \equiv 1 \quad (15)$

$\varphi(15) = \varphi(3\cdot 5) =$
$= \varphi(3)\cdot\varphi(5) =$
$2\cdot 4 = 8$

Nad $\mathbb{Z}_{11}$ platí: pro libovolné $a \in \mathbb{Z}$, $(a, 11) = 1$:
$a^{10} \equiv 1 \quad (11)$, $[a]_{\mathbb{Z}_{11}}^{10} = [1]_{\mathbb{Z}_{11}} \Leftrightarrow [a]_{\mathbb{Z}_{11}}^{10} - [1]_{\mathbb{Z}_{11}} = [0]$

tedy ~~plk~~ polynom $x^{10} - 1$ má za kořeny
prvky $[1]_{11}$, $[2]_{\mathbb{Z}_{11}}$, $[3]_{\mathbb{Z}_{11}}, \dots, [10]_{\mathbb{Z}_{11}}$, tedy

$$(x^{10} - 1) = (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-10)$$
$$= (x-1)(x^9 + x^8 + x^7 + \cdots + x + 1)$$

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

tedy

$$x^9 + x^8 + \cdots + x + 1 = (x-2)(x-3)\cdots(x-10)$$

	1	2	2	2
2	1	4	10	0
3	1	7	9	
4	1	8	$\neq 0$	
5	1	-2	0	

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 2 = (x-2)(x^2 + 4x - 1)$$
$$= (x-2)(x-5)(x-2)$$
$$= (x-5)(x-2)^2$$

Společný faktor je tedy $(x-2)(x-5)$

	1	2	-4	-8
2	1	4	4	0

$$x^3+2x^2-4x-8=$$

$$=(x-2)(x^2+4x+4)=$$

$$=(x-2)(x+2)^2$$

Rac. kořeny?

	4	3	5	2	1
$\frac{1}{2}$	4	5			
$-\frac{1}{2}$	4	1	$\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{8}$
$-\frac{1}{4}$	4	2	$\frac{9}{2}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{25}{32}$

Násobné kořeny polynomu jsou zároveň kořeny derivace daného polynomu. Tyto jsou tedy kořeny společného faktoru polynomu a jeho derivace.

$$4x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 2x + 1 : (16x^3 + 9x^2 + 10x + 2) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{64}$$

$$-\left(4x^4 + \frac{9}{4}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right)$$

$$\frac{3}{4}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$$

$$-\left(\frac{3}{4}x^3 + \frac{27}{64}x^2 + \frac{15}{32}x + \frac{3}{32}\right)$$

133

$$(x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4) : (4x^3 + 6x^2 + 10x + 5) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\right.$$

$$\left(x^4 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x\right)$$

$$\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3x + 4$$

$$\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{7}{4}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{7}{2}\right) = \frac{7}{4}\left(x^2 + x + 2\right)$$

$$(4x^3 + 6x^2 + 10x + 5) : (x^2 + x + 2) = 4x + 2$$

$$4x^3 + 4x^2 + 8x$$

Největší společný dělitel polynomů

$$x^5 + 2x^3 + \sqrt{5}x^2 + 5x + 5 \quad \text{a} \quad 4x^3 + 6x^2 + 10x + 5$$

je polynom $x^2 + x + 2$. Určíme jeho kořeny: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$

Rozklad daného polynomu tedy je (nad $\mathbb{C}$)

$$\left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 \left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$$

nad $\mathbb{R}$:

$$\left(x^2 + x + 2\right)^2$$

$x^4 + 5x + 5$ je ired. nad $\mathbb{Q}$

Nalezněme kořeny: substituce $s = x^2$:

$$s^2 + 2s + 2 \quad , \quad s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$$

Kořeny $x^4 + 2x^2 + 2$ jsou tedy

$$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{-1 \pm i}$$

Nad $\mathbb{C}$:

$$\left(x - \sqrt{-1+i}\right)\left(x - \sqrt{-1-i}\right)\left(x + \sqrt{-1+i}\right)\left(x + \sqrt{-1-i}\right) =$$

$$= \left(x^2 - x\left(\sqrt{-1+i} + \sqrt{-1-i}\right) + \sqrt{2}\right)\left(x^2 + x\left(\sqrt{-1+i} + \sqrt{-1-i}\right) + \sqrt{2}\right)$$

abs. hodnota $\sqrt{-1+i}$ je $\sqrt[4]{2}$

Napišeme-li $(-1+i)$ v gon. tvaru:

$$(-1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right), \quad \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \ldots$$

	1	0	2	0	2
1	1	1	3	3	0
-1	1	0	3	0	

x^3+x^2+3x+3

x^2+3

Rozklad nad $\mathbb{Z}_5$ je $(x+1)(x-1)(x^2+3)$

	1	0	2	0	2