MB104 – 3. demonstrovaná cvičení
Grupy a faktorgrupy

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

5.3. 2007

Příklad 1. *Doplňte následující tabulku operace $\star$ na množině $\{a, b, c\}$ tak, aby zadávala pologrupu.*

	a	b	c
a	b	a	a
b			
c			

Je toto doplnění jednoznačné? Kolik jich existuje?

Řešení. Existují dvě různá doplnění:

	a	b	c
a	b	a	a
b	a	b	b
c	a	b	[b,c]

Řešení. Existují dvě různá doplnění:

	a	b	c
a	b	a	a
b	a	b	b
c	a	b	[b,c]

$ba = (aa)a = a(aa) = ab = a,$

Řešení. Existují dvě různá doplnění:

	a	b	c
a	b	a	a
b	a	b	b
c	a	b	[b,c]

$$ba = (aa)a = a(aa) = ab = a,$$
$$bb = (aa)b = a(ba) = aa = b,$$

Řešení. Existují dvě různá doplnění:

	a	b	c
a	b	a	a
b	a	b	b
c	a	b	[b,c]

$$ba = (aa)a = a(aa) = ab = a,$$
$$bb = (aa)b = a(ba) = aa = b,$$
$$bc = (aa)c = a(ac) = aa = b,$$

Řešení. Existují dvě různá doplnění:

	a	b	c
a	b	a	a
b	a	b	b
c	a	b	[b,c]

$ba = (aa)a = a(aa) = ab = a$,
$bb = (aa)b = a(ba) = aa = b$,
$bc = (aa)c = a(ac) = aa = b$,
$a(ca) = (ac)a = aa = b$, tedy $(ca) = a$.

Řešení. Existují dvě různá doplnění:

	a	b	c
a	b	a	a
b	a	b	b
c	a	b	[b,c]

$ba = (aa)a = a(aa) = ab = a$,
$bb = (aa)b = a(ba) = aa = b$,
$bc = (aa)c = a(ac) = aa = b$,
$a(ca) = (ac)a = aa = b$, tedy $(ca) = a$.
Dále $cb = c(aa) = (ca)a = aa = b$.

Řešení. Existují dvě různá doplnění:

	a	b	c
a	b	a	a
b	a	b	b
c	a	b	[b,c]

$ba = (aa)a = a(aa) = ab = a$,
$bb = (aa)b = a(ba) = aa = b$,
$bc = (aa)c = a(ac) = aa = b$,
$a(ca) = (ac)a = aa = b$, tedy $(ca) = a$.
Dále $cb = c(aa) = (ca)a = aa = b$.
Na cc dostáváme omezení (díky $acc = ac$) $cc = b$, nebo $cc = c$.
Obě možnosti jsou možné. $\square$

Příklad 2. *Kolik existuje čtyřprvkových grup?*

Příklad 2. *Kolik existuje čtyřprvkových grup?*

Řešení. Nejlépe odvodíme pomocí řádů prvků v grupě. □

Příklad 3. *Určete inverze prvků* 17, 18 *a* 19 *v* $\mathbb{Z}_{131}^{+}$.

Příklad 3. *Určete inverze prvků* 17, 18 *a* 19 *v* $\mathbb{Z}_{131}^{+}$.

Řešení. Nalezneme pomocí Eukleidova algoritmu:

$131 = 7 \cdot 17 + 12,$

Příklad 3. *Určete inverze prvků* 17, 18 *a* 19 *v* $\mathbb{Z}_{131}^{+}$.

Řešení. Nalezneme pomocí Eukleidova algoritmu:

$131 = 7 \cdot 17 + 12,$

$17 = 12 + 5,$

Příklad 3. *Určete inverze prvků* 17, 18 *a* 19 *v* $\mathbb{Z}_{131}^{+}$.

Řešení. Nalezneme pomocí Eukleidova algoritmu:

$131 = 7 \cdot 17 + 12,$

$17 = 12 + 5,$

$12 = 2 \cdot 5 + 2,$

Příklad 3. *Určete inverze prvků* 17, 18 *a* 19 *v* $\mathbb{Z}_{131}^{+}$.

Řešení. Nalezneme pomocí Eukleidova algoritmu:

$131 = 7 \cdot 17 + 12,$

$17 = 12 + 5,$

$12 = 2 \cdot 5 + 2,$

$5 = 2 \cdot 2 + 1,$

je tedy $1 = 5 - 2 \cdot 2$

Příklad 3. *Určete inverze prvků* 17, 18 *a* 19 *v* $\mathbb{Z}_{131}^{+}$.

Řešení. Nalezneme pomocí Eukleidova algoritmu:

$131 = 7 \cdot 17 + 12,$

$17 = 12 + 5,$

$12 = 2 \cdot 5 + 2,$

$5 = 2 \cdot 2 + 1,$

je tedy $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(12 - 2 \cdot 5)$

Příklad 3. *Určete inverze prvků* 17, 18 *a* 19 *v* $\mathbb{Z}_{131}^{+}$.

Řešení. Nalezneme pomocí Eukleidova algoritmu:
$131 = 7 \cdot 17 + 12,$
$17 = 12 + 5,$
$12 = 2 \cdot 5 + 2,$
$5 = 2 \cdot 2 + 1,$
je tedy $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(12 - 2 \cdot 5) = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 12$

Příklad 3. *Určete inverze prvků* 17, 18 *a* 19 *v* $\mathbb{Z}^+_{131}$.

Řešení. Nalezneme pomocí Eukleidova algoritmu:
$131 = 7 \cdot 17 + 12,$
$17 = 12 + 5,$
$12 = 2 \cdot 5 + 2,$
$5 = 2 \cdot 2 + 1,$
je tedy $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(12 - 2 \cdot 5) = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 12 =$
$5 \cdot (17 - 12) - 2 \cdot 12$

Příklad 3. *Určete inverze prvků* 17, 18 *a* 19 *v* $\mathbb{Z}_{131}^{+}$.

Řešení. Nalezneme pomocí Eukleidova algoritmu:
$131 = 7 \cdot 17 + 12$,
$17 = 12 + 5$,
$12 = 2 \cdot 5 + 2$,
$5 = 2 \cdot 2 + 1$,
je tedy $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(12 - 2 \cdot 5) = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 12 =$
$5 \cdot (17 - 12) - 2 \cdot 12 = 5 \cdot 17 - 7 \cdot 12$

Příklad 3. *Určete inverze prvků* 17, 18 *a* 19 *v* $\mathbb{Z}_{131}^{+}$.

Řešení. Nalezneme pomocí Eukleidova algoritmu:
$131 = 7 \cdot 17 + 12,$
$17 = 12 + 5,$
$12 = 2 \cdot 5 + 2,$
$5 = 2 \cdot 2 + 1,$
je tedy $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(12 - 2 \cdot 5) = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 12 =$
$5 \cdot (17 - 12) - 2 \cdot 12 = 5 \cdot 17 - 7 \cdot 12 =$
$= 5 \cdot 17 - 7 \cdot (131 - 7 \cdot 17)$

Příklad 3. *Určete inverze prvků* 17, 18 *a* 19 *v* $\mathbb{Z}_{131}^{+}$.

Řešení. Nalezneme pomocí Eukleidova algoritmu:
$131 = 7 \cdot 17 + 12,$
$17 = 12 + 5,$
$12 = 2 \cdot 5 + 2,$
$5 = 2 \cdot 2 + 1,$
je tedy $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(12 - 2 \cdot 5) = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 12 =$
$5 \cdot (17 - 12) - 2 \cdot 12 = 5 \cdot 17 - 7 \cdot 12 =$
$= 5 \cdot 17 - 7 \cdot (131 - 7 \cdot 17) = 54 \cdot 17 - 7 \cdot 131,$
inverze k 17 je 54.

Příklad 3. *Určete inverze prvků* 17, 18 *a* 19 *v* $\mathbb{Z}_{131}^{+}$.

Řešení. Nalezneme pomocí Eukleidova algoritmu:
$131 = 7 \cdot 17 + 12,$
$17 = 12 + 5,$
$12 = 2 \cdot 5 + 2,$
$5 = 2 \cdot 2 + 1,$
je tedy $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(12 - 2 \cdot 5) = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 12 =$
$5 \cdot (17 - 12) - 2 \cdot 12 = 5 \cdot 17 - 7 \cdot 12 =$
$= 5 \cdot 17 - 7 \cdot (131 - 7 \cdot 17) = 54 \cdot 17 - 7 \cdot 131,$
inverze k 17 je 54.
Obdobně $[18]_{\mathbb{Z}_{131}^{+}}^{-1} = 51$ a $[19]_{\mathbb{Z}_{131}^{+}} = 69$.

$\square$

1. Řešení domácích úloh z minulého týdne

2. Návodné úlohy
   - Homomorfismy grup

Řekneme, že podgrupa H grupy G **je generovaná** prvky a_1, a_2, $\dots a_n \in G$, jestliže je to nejmenší (vzhledem k uspořádání inkluzí) podgrupa v G obsahující všechny dané prvky.

Řekneme, že podgrupa H grupy G **je generovaná** prvky a_1, a_2, $\dots a_n \in G$, jestliže je to nejmenší (vzhledem k uspořádání inkluzí) podgrupa v G obsahující všechny dané prvky.

V $(Z_{20}, +)$ určete podgrupu H generovanou prvky $[4]_{Z_{20}}$ a $[10]_{Z_{20}}$.

Řekneme, že podgrupa H grupy G **je generovaná** prvky a_1, a_2, $\ldots a_n \in G$, jestliže je to nejmenší (vzhledem k uspořádání inkluzí) podgrupa v G obsahující všechny dané prvky.

V $(Z_{20}, +)$ určete podgrupu H generovanou prvky $[4]_{Z_{20}}$ a $[10]_{Z_{20}}$.

V S_4 určete podgrupu H generovanou permutacemi (123) a (234).

Řekneme, že podgrupa H grupy G **je generovaná** prvky a_1, a_2, $\dots a_n \in G$, jestliže je to nejmenší (vzhledem k uspořádání inkluzí) podgrupa v G obsahující všechny dané prvky.

V $(Z_{20}, +)$ určete podgrupu H generovanou prvky $[4]_{Z_{20}}$ a $[10]_{Z_{20}}$.

V S_4 určete podgrupu H generovanou permutacemi (123) a (234).

V S_4 určete podgrupu H generovanou permutacemi $(12)(34), (13)(24)$.

Rozhodněte o následujících předpisech, jestli jsou to zobrazení a pokud ano, zda jsou homomorfismy či isomorfismy grup:

- $f : (\mathbb{Z}_8, +) \to (\mathbb{Z}_8, *)$, $f([a]_{\mathbb{Z}_8}) = [a+3]_{\mathbb{Z}_8}$

Rozhodněte o následujících předpisech, jestli jsou to zobrazení a pokud ano, zda jsou homomorfismy či isomorfismy grup:

- $f : (\mathbb{Z}_8, +) \to (\mathbb{Z}_8, *)$, $f([a]_{\mathbb{Z}_8}) = [a+3]_{\mathbb{Z}_8}$
- $f : (\mathbb{Z}_5^*, \cdot) \times (\mathbb{Z}_3^* \cdot) \to \mathbb{Z}_{15}^*$, $f([a]_{\mathbb{Z}_5^*} \times [b]_{\mathbb{Z}_3^*}) = [ab]_{\mathbb{Z}_{15}^*}$

Ukažte, že zobrazení $f : \mathbb{Z}_n^* \to \mathbb{Z}_n^*$, $[x]_{\mathbb{Z}_n} \mapsto [x^2]_{\mathbb{Z}_n}$ je homomorfismem grup. Co je jeho jádrem? Jak vypadá příslušná faktorová grupa podle jádra?

Ukažte, že zobrazení $f : \mathbb{Z}_n^* \to \mathbb{Z}_n^*$, $[x]_{\mathbb{Z}_n} \mapsto [x^2]_{\mathbb{Z}_n}$ je homomorfismem grup. Co je jeho jádrem? Jak vypadá příslušná faktorová grupa podle jádra?

Uvažme zobrazení $\det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$. Je toto zobrazení homomorfismem? Co je jeho jádrem K, jak vypadá příslušná faktorová podgrupa $GL(n, \mathbb{R})/K$?

Ukažte, že pro libovolný cyklus σ v S_n je $\tau\sigma\tau^{-1}$ opět cyklus stejné délky (pro libovolné $\tau \in S_n$).