t - normy

Triangulární normy (t-normy) tvoří širokou třídu logických spojek pro realizaci průniku a sjednocení.

Def.: t-norma je funkce dvou argumentů:

- $t: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$

  taková, že:

  a) je v každém argumentu neklesající
  $x \leq y,\ w \leq z$, pak $x\,t\,w \leq y\,t\,z$

  b) je komutativní $x\,t\,y = y\,t\,x$

  c) je asociativní $(x\,t\,y)\,t\,z = x\,t\,(y\,t\,z)$

  d) splňuje ohraničující podmínky
  $x\,t\,0 = 0,\ x\,t\,1 = x,\quad x, y, z, w \in [0,1]$

Def.: s-norma (t-konorma) je funkce 2 arg.:

- $s: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$

  taková, že:

  a) je neklesající v každém argumentu

  b) je komutativní

  c) je asociativní

  d) splňuje ohraničující podmínky
  $x\,s\,0 = x,\quad x\,s\,1 = 1$

t-normy korespondují s průnikem (AND), s-normy se sjednocením (OR).

s-normu lze odvodit z t-normy pomocí vztahu:

$$x\,s\,y = 1 - \big((1-x)\,t\,(1-y)\big)$$

Některé ze základních t-norem

minimum $\quad MIN(a,b) = \min\{a,b\} = a \wedge b$

Łukasiewicz $\quad LAND(a,b) = \max\{a+b-1,\ 0\}$

pravděpod. součin (algebr. součin) $\quad PAND(a,b) = a * b$

slabší $\quad WEAK(a,b) = \begin{cases} a \wedge b & \text{když } a \vee b = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

Hamacher $(\gamma \geq 0)$

$$H_\gamma(a,b) = \frac{ab}{(\gamma + (1-\gamma)(a+b-ab))}$$

Dubois & Prade $(\alpha \in]0,1[\,)$

$$d_\alpha(a,b) = \frac{ab}{\max\{a,b,\alpha\}}$$

? $(p \geq 1)$

$$a\,t\,b = 1 - \min\left[1, \left((1-a)^p + (1-b)^p\right)^{1/p}\right]$$

? $(0 < w < \infty,\ w \neq 1)$

$$a\,t\,b = \log_w\left[1 + \frac{(w^a-1)(w^b-1)}{(w-1)}\right]$$

? $(\lambda \geq -1)$

$$a\,t\,b = \max\left[0, (\lambda+1)(a+b-1) - \lambda ab\right]$$

Všechny t-normy mohou být (pomocí asociativity) rozšířeny na $n>2$ argumenty, např.:

$MIN(a_1, \dots, a_n) = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$

$PAND(a_1, \dots, a_n) = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$

$LAND(a_1, \dots, a_n) = \max\{\sum_{i=1}^{n} a_i - n + 1,\ 0\}$

Některé ze základních s-norem

maximum $\quad MAX(a,b) = \max\{a,b\}$

Łukasiewicz $\quad LOR(a,b) = \min\{a+b,\ 1\}$

pravděpod. součet $\quad POR(a,b) = a+b-ab$

silnější $\quad STRONG(a,b) = \begin{cases} a \vee b & \text{když } a \wedge b = 0 \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$

Hamacher $(\gamma \geq 0)$

$$a\,s\,b = \frac{ab(\gamma-2) + a + b}{ab(\gamma-1) + 1}$$

? $(p \geq 1)$

$$a\,s\,b = \min\left(1, (a^p + b^p)^{1/p}\right)$$

? $(0 < w < \infty,\ w \neq 1)$

$$a\,s\,b = 1 - \log_w\left[1 + \frac{(w^{1-a}-1)(w^{1-b}-1)}{(w-1)}\right]$$

? $(\lambda \geq -1)$

$$a\,s\,b = \min\{1,\ a+b+\lambda ab\}$$

Podobné jako t-normy, lze rozšířit i s-normy na $n>2$ argumentů, např.:

$$MAX(a_1, \dots, a_n) = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n = \bigvee_{i=1}^{n} a_i$$

Pro každou t-normu platí nerovnost:

$$x \wedge y \geq x\,t\,y \geq \begin{cases} x & \text{když } y = 1 \\ y & \text{když } x = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

tj. třída t-norem je ohraničená (shora minimem, zdola tzv. drastickým součinem).

Podobně pro s-normy platí:

$$x \vee y \leq x\,s\,y \leq \begin{cases} x & \text{když } y = 0 \\ y & \text{když } x = 0 \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

Ohraničení shora je tzv. drastickým součtem a zdola maximem.

Některé t-normy (s-normy) obsahují parametry. Volbou parametrů lze modifikovat charakter logických spojek. Např.:

$p=0$ pak $a\,t\,b$ se redukuje na drast. součin

$p \to \infty$ dává minimum

$p=0$ pak $a\,s\,b$ se redukuje na drast. součet

$p \to \infty$ dává maximum

Pozn.: Velmi známé Łukasiewiczovy spojky (pocházející z jeho teorie vícehodnotové logiky) mohou být odvozeny pomocí nastavení λ:

$$\lambda = 0: \quad a\,t\,b = \max(0, a+b-1)$$
$$a\,s\,b = \min(1, a+b)$$

Nekonečná třída t-norem (včetně parametrických verzí) dává široký repertoár formálních modelů logických spojek.

Konkrétní výběr operátorů AND (konjunkce) a OR (disjunkce) závisí na typu řešeného problému.

$\wedge$ a $\vee$ způsobují, že jakmile jeden z argumentů má hodnotu (funkce příslušnosti) větší než ostatní (pro $\vee$) nebo menší než ostatní (pro $\wedge$), pak ty „ostatní" hodnoty nemají žádný vliv na výsledek. Jinými slovy, mezi argumenty není žádná interaktivita.

Výhodou zde je, že nejsou zapotřebí žádné přesné hodnoty funkce příslušnosti – stačí hrubý odhad (chyby měřicího postupu mohou být do velké míry ignorovány). To vede k tzv. robustnosti.

Na druhé straně „necitlivost" robustních systémů se může ukázat jako nevýhoda když takto získané výsledky neodpovídají charakteru kombinovaných dat a jejich vzájemné interakci. Proto je zapotřebí mít k dispozici různé možnosti (úrovně) interakce.

<u>Př.: nízká cena řízení AND vysoká přesnost sledování</u>

Obě složky (cena, přesnost) představují různé cíle určité řídicí strategie. Formulace problému se spojkou AND indikuje interakci mezi dvěma navzájem konfliktními cíly. Proto zde není vhodné použít $\wedge$, nýbrž kupř. $*$ (algebr. součin).

<u>Př.: nový AND rychlý automobil</u>

Zde není interakce mezi nový a rychlý zřejmá. Proto je v takovém případě použití $\wedge$ přiměřené.

<u>Kompenzační operátory</u>

Existuje-li operátor C takový, že platí:

$$\min\{a,b\} \leq C(a,b) \leq \max\{a,b\}$$
$$\forall a,b \in [0,1]$$

pak o takovém operátoru říkáme, že je to kompenzační operátor.