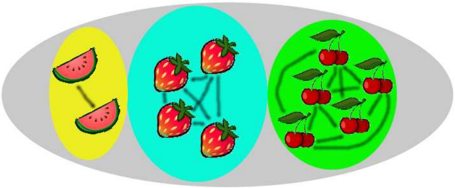
4 Binární relace, Ekvivalence

Na pojem relace velmi brzo narazí (snad) každý informatik při studiu relačních databází. Není to však jen tato oblast, ale i jiná místa informatiky, kde se relace skrývají či přímo explicitně objevují. Nejčastěji se takto setkáme s binárními relacemi, například vždy, když rozdělujeme objekty podle „shodných“ znaků (relace ekvivalence), nebo když objekty mezi sebou „srovnáváme“ (relace uspořádání).



□

Stručný přehled lekce

* Reprezentace relací, tabulkou a grafem.
* Základní vlastnosti binárních relací.
* Relace ekvivalence, neboli rozklady množin.

Zopakování pojmu relace

Definice 4.1. **Relace** mezi množinami $A_1, \cdots, A_k$, pro $k \in \mathbb{N}$, je libovolná podmnožina kartézského součinu

$$R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_k \,. \square$$

Pokud $A_1 = \cdots = A_k = A$, hovoříme o *k-ární relaci na A*. $\square$

Takže *binární relace R* (pro $k = 2$) je

$$R \subseteq A \times A \,. \square$$

Příklady relací.

- $\{(1,a),(2,a)\}$ je relace mezi $\{1,2,3\}$ a $\{a,b\}$.
- $\{(i,2.i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ je binární relace na $\mathbb{N}$. $\square$
- $\{(i,j,i+j) \mid i,j \in \mathbb{N}\}$ je ternární relace na $\mathbb{N}$.
- Relace „mít rychlejší počítač“ je binární relací mezi studenty FI.

4.1 Reprezentace konečných relací

Příklad 4.2. *Tabulky relační databáze.*

Definujme následující množiny („elementární typy“)

- ZNAK $= \{a, \cdots, z, A, \cdots, Z, mezera\}$,
- CISLICE $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. □

Dále definujeme tyto množiny („odvozené typy“)

- JMENO = ZNAK^{15}, PRIJMENI = ZNAK^{20},
- VEK = CISLICE^{3},
- ZAMESTNANEC $\sim$ JMENO $\times$ PRIJMENI $\times$ VEK. □

Relaci „typu“ ZAMESTNANEC pak lze reprezentovat tabulkou:

JMENO	PRIJMENI	VEK
Jan	Novák	42
Petr	Vichr	28
Pavel	Zíma	26

□

□

Definice: *Relační databáze* je konečná množina tabulek. *Schéma databáze* je (zjednodušeně řečeno) množina „typů“ jednotlivých tabulek.

Reprezentace binárních relací na množině

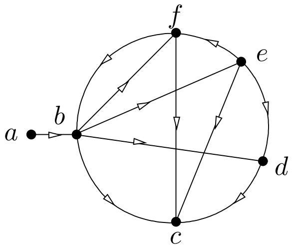
Značení: Binární relaci $R \subseteq M \times M$ lze jednoznačně znázornit jejím *grafem*.

- Prvky M znázorníme jako body v rovině.
- Prvek $(a, b) \in R$ znázorníme jako *orientovanou hranu* („šipku") z a do b.

  Je-li $a = b$, pak je touto hranou „smyčka" na a. □

Pozor, nejedná se o „grafy funkcí" známé z analýzy.

Například mějme $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ a $R = \{(a, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (d, c), (e, c), (f, c), (e, d), (e, f), (f, b)\}$, pak:



V případě, že R je nekonečná nebo „velká", může být reprezentace R jejím grafem nepraktická (záleží pak na míře „pravidelnosti" R).

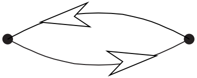
4.2 Vlastnosti binárních relací

Definice 4.3. Nechť $R \subseteq M \times M$. Binární relace R je

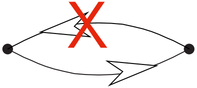
- *reflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a,a) \in R$;

- *ireflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a,a) \notin R$;

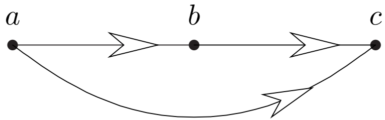
- *symetrická*, právě když pro každé $a,b \in M$ platí, že jestliže $(a,b) \in R$, pak také $(b,a) \in R$;



- *antisymetrická*, právě když pro každé $a,b \in M$ platí, že jestliže $(a,b),(b,a) \in R$, pak $a = b$;



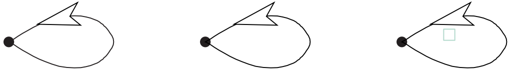
- *tranzitivní*, právě když pro každé $a, b, c \in M$ platí, že jestliže $(a, b), (b, c) \in R$, pak také $(a, c) \in R$.



Následují dva základní typy binárních relací, R je

- relace *ekvivalence*, právě když je R reflexivní, symetrická a tranzitivní;
- *částečné uspořádání*, právě když je R reflexivní, antisymetrická a tranzitivní (často říkáme jen *uspořádání*).

Poznámka: Pozor, může být relace symetrická i antisymetrická zároveň? Ano!



Příklad 4.4. *Několik příkladů relací definovaných v přirozeném jazyce.*

Buď M množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace $R \subseteq M \times M$ definované takto

- $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejné rodné číslo;□
- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou výšku jako y (dejme tomu na celé mm);□
- $(x, y) \in R$ právě když výška x a y se neliší více jak o 2 mm;□
- $(x, y) \in R$ právě když x má alespoň takovou výšku jako y;□
- $(x, y) \in R$ právě když x má jinou výšku než y (dejme tomu na celé mm);□
- $(x, y) \in R$ právě když x je zamilován(a) do y.□

□

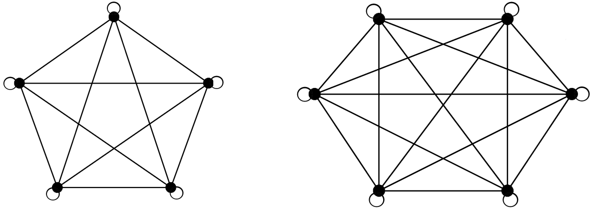
Příklad 4.5. *Jaké vlastnosti mají následující relace?*

- Buď $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná takto $(x, y) \in R$ právě když x dělí y. □(Částečné uspořádání, ale ne každá dvě čísla jsou porovnatelná.)
- Buď $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná takto $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejný zbytek po dělení číslem 5. □(Ekvivalence.)
- Nechť $F = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ je množina funkcí. Buď $R \subseteq F \times F$ definovaná takto $(f, g) \in R$ právě když $f(x) < g(x)$ pro všechna x. □(Antisymetrická a tranzitivní, ale ne reflexivní – není uspořádání.)

□

4.3 Relace ekvivalence

- Relace $R \subseteq M \times M$ je *ekvivalence* právě když R je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Tyto tři vlastnosti je tedy třeba ověřit k důkazu toho, že daná relace R je ekvivalence.□
- Jak vypadá *graf ekvivalence*?□



- Neformálně řečeno: ekvivalence je relace $R \subseteq M \times M$, taková, že $(x, y) \in R$ právě když x a y jsou v nějakém smyslu „stejné“.

Buď M množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace $R \subseteq M \times M$ definované takto

- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou výšku jako y; □
- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou barvu vlasů jako y; □
- $(x, y) \in R$ právě když x, y mají stejnou výšku a stejnou barvu vlasů; □
- $(x, y) \in R$ právě když x, y mají buď stejnou výšku nebo stejnou barvu vlasů. □
  (Tato relace obecně není ekvivalence! Proč?)

Příklad 4.6. *Buď $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ binární relace definovaná takto: $(x, y) \in R$ právě když $|x - y|$ je dělitelné třemi.*

V jakém smyslu jsou zde x a y „stejné"? □Dávají stejný zbytek po dělení třemi. □

Příklad 4.7. *Buď R binární relace mezi všemi studenty na přednášce FI: IB000 definovaná takto: $(x, y) \in R$ právě když x i y sedí v první lavici.* □

Proč se v tomto případě nejedná o relaci ekvivalence? □
Protože není reflexivní pro studenty sedící v dalších lavicích. (Takže si dávejte dobrý pozor na správné pochopení definic.) □

4.4 Rozklady a jejich vztah k ekvivalencím

Definice 4.8. Rozklad. Buď M množina.
Rozklad (na) M je množina podmnožin $\mathcal{N} \subseteq 2^M$ splňující násl. tři podmínky:

- $\emptyset \notin \mathcal{N}$ (tj. každý prvek $\mathcal{N}$ je neprázdná podmnožina M);
- pokud $A, B \in \mathcal{N}$, pak buď $A = B$ nebo $A \cap B = \emptyset$;
- $\bigcup_{A \in \mathcal{N}} A = M$. $\Box$

Prvkům $\mathcal{N}$ se také říká *třídy rozkladu*.

- Buď $M = \{a, b, c, d\}$. Pak $\mathcal{N} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ je rozklad na M. $\Box$
- Nechť $A_0 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ mod } 3 = 0\}$, $A_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ mod } 3 = 1\}$, $A_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ mod } 3 = 2\}$.
  Pak $\mathcal{N} = \{A_0, A_1, A_2\}$ je rozklad všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ podle zbytkových tříd.
- Každý rozklad $\mathcal{N}$ na M jednoznačně určuje jistou ekvivalenci $R_{\mathcal{N}}$ na M.

Věta 4.9. *Buď M množina a $\mathcal{N}$ rozklad na M. Nechť $R_{\mathcal{N}} \subseteq M \times M$ je relace na M definovaná takto*

$$(x,y) \in R_{\mathcal{N}} \text{ právě když existuje } A \in \mathcal{N} \text{ taková, že } x,y \in A.$$

Pak $R_{\mathcal{N}}$ je ekvivalence na M. □

Důkaz: Dokážeme, že $R_{\mathcal{N}}$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní (Def. 4.3). □

- Reflexivita: Buď $x \in M$ libovolné. Jelikož $\mathcal{N}$ je rozklad na M, musí existovat $A \in \mathcal{N}$ takové, že $x \in A$ (jinak spor se třetí podmínkou z Definice 4.8). Proto $(x,x) \in R_{\mathcal{N}}$, tedy $R_{\mathcal{N}}$ je reflexivní. □
- Symetrie: Nechť $(x,y) \in R_{\mathcal{N}}$. Podle definice $R_{\mathcal{N}}$ pak existuje $A \in \mathcal{N}$ taková, že $x,y \in A$. To ale znamená, že také $(y,x) \in R_{\mathcal{N}}$ podle definice $R_{\mathcal{N}}$, tedy $R_{\mathcal{N}}$ je symetrická. □
- Tranzitivita: Nechť $(x,y),(y,z) \in R_{\mathcal{N}}$. Podle definice $R_{\mathcal{N}}$ existují $A,B \in \mathcal{N}$ takové, že $x,y \in A$ a $y,z \in B$. Jelikož $A \cap B \neq \emptyset$, podle druhé podmínky z Definice 4.8 platí $A = B$. Tedy $x,z \in A = B$, proto $(x,z) \in R_{\mathcal{N}}$ podle definice $R_{\mathcal{N}}$.

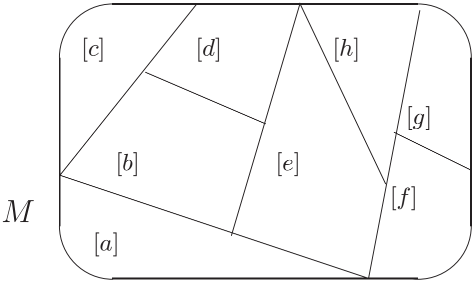
□

Každá ekvivalence R na M jednoznačně určuje jistý rozklad M/R na M.

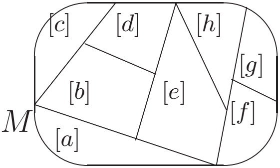
Věta 4.10. *Buď M množina a R ekvivalence na M. Pro každé $x \in M$ definujeme množinu*

$$[x] = \{y \in M \mid (x,y) \in R\}.$$

Pak $\{[x] \mid x \in M\}$ je rozklad na M, který značíme M/R. □



Důkaz: Dokážeme, že M/R splňuje podmínky Definice 4.8.



- Pro každé $[x] \in M/R$ platí $[x] \neq \emptyset$, neboť $x \in [x]$.□
- Nechť $[x], [y] \in M/R$. Ukážeme, že pokud $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, pak $[x] = [y]$. □
  Jestliže $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, existuje $z \in M$ takové, že $z \in [x]$ a $z \in [y]$. Podle definice $[x]$ a $[y]$ to znamená, že $(x, z), (y, z) \in R$. Jelikož R je symetrická a $(y, z) \in R$, platí $(z, y) \in R$. Jelikož $(x, z), (z, y) \in R$ a R je tranzitivní, platí $(x, y) \in R$. Proto také $(y, x) \in R$ (opět ze symetrie R). □Nyní dokážeme, že $[y] = [x]$:
  * „$[x] \subseteq [y]$:“ Nechť $v \in [x]$. Pak $(x, v) \in R$ podle definice $[x]$. Dále $(y, x) \in R$ (viz výše), tedy $(y, v) \in R$ neboť R je tranzitivní. To podle definice $[y]$ znamená, že $v \in [y]$.□
  * „$[y] \subseteq [x]$:“ Nechť $v \in [y]$. Pak $(y, v) \in R$ podle definice $[y]$. Dále $(x, y) \in R$ (viz výše), tedy $(x, v) \in R$ neboť R je tranzitivní. To podle definice $[x]$ znamená, že $v \in [x]$.□
- Platí $\bigcup_{[x] \in M/R} [x] = M$, neboť $x \in [x]$ pro každé $x \in M$. □