Matematika II. 12. cvičení

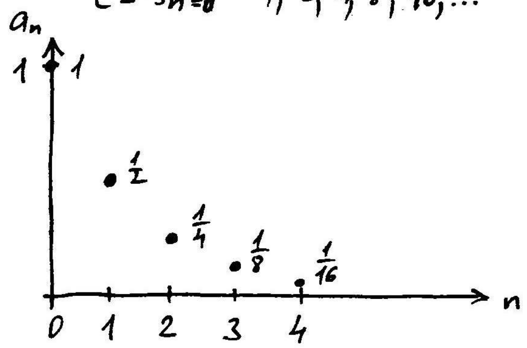
7.5.08

Posloupnosti a řady čísel a funkcí

I. Čísla

posloupnost

$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$



limita posloupnosti: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \underline{\underline{0}}$

řada

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = s$

$s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ — součet prvních n členů

$s_0 = 1 = 2 - 1$

$s_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2}$

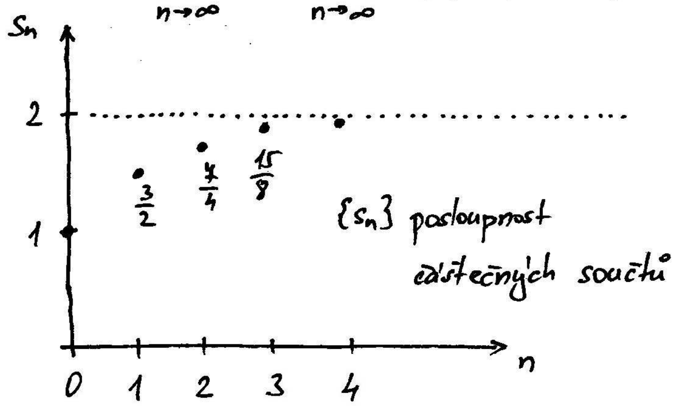
$s_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 2 - \frac{1}{4}$

$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} = 2 - \frac{1}{8}$

$\vdots$

$s_n = \dots\dots\dots = 2 - \frac{1}{2^n}$

$s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = \left\| 2 - \frac{1}{\infty} \right\| = 2 - 0 = \underline{\underline{2}}$



$\lim\limits_{n\to\infty} s_n =$
- číslo .... $\sum$ K
- $\pm\infty$ .... $\sum$ D
- $\nexists$ .... $\sum$ osciluje

Ⓐ Řady s nezápornými členy (konvergují nebo divergují k $+\infty$)

kritéria: 1) srovnávací — např. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2}$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ K $\oplus$ $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{3n^2} \Rightarrow \underline{\underline{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2} \text{ K}}}$

2) integrální

3) podílové $\quad q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

4) odmocninové $\quad q = \sqrt[n]{a_n}$

$q < 1$ .... $\sum a_n$ K

$q > 1$ .... $\sum a_n$ D

$q = 1$ .... nelze podle těchto kritérií rozhodnout

př 8 Rozhodněte o konvergenci či divergenci řad

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1 \Rightarrow$ řada konverguje

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ řada <u>diverguje</u>

(B) Alternující řady

jsou tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n , \quad a_n \geqq 0$$

← členy pravidelně střídají znaménka

Leibnitzovo kritérium

Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí posloupnost kladných čísel ⊕ platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ K

(př 9) Ukažte, že následující řady konvergují

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\frac{1}{n}\right\} \text{ nerostoucí } \checkmark \\ \frac{1}{n} > 0 \quad \checkmark \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \checkmark \end{array}\right\} \Rightarrow K$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{1}{n^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\frac{1}{n^2}\right\} \text{ nerostoucí } \checkmark \\ \frac{1}{n^2} > 0 \quad \checkmark \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \checkmark \end{array}\right\} \Rightarrow K$$

absolutní / relativní konvergence

Def.: $\sum a_n$ konverguje absolutně, jestliže $\sum |a_n|$ K

relativně D

př

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \ \ldots\ldots\ K \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ \ldots\ldots\ D \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \text{ konverguje } \underline{\text{relativně}}$$

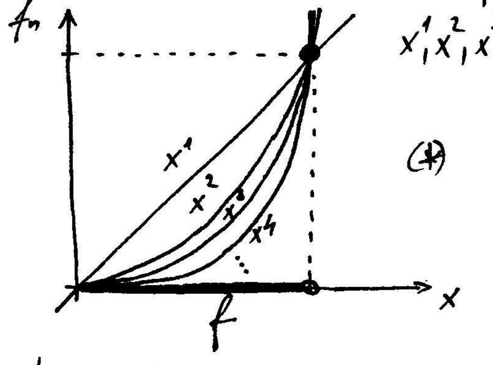
$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \ \ldots\ldots\ K \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ \ldots\ldots\ K \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \text{ konverguje } \underline{\text{absolutně}}$$

II. Funkce

posloupnost

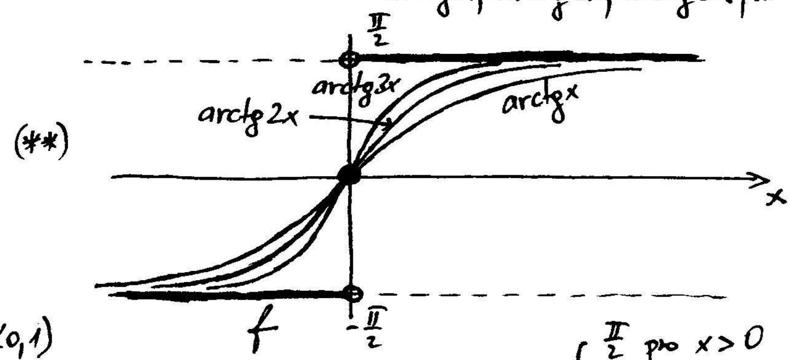
a) $\{x^n\}$ na intervalu $x \in \langle 0,1 \rangle$

$x^1, x^2, x^3, x^4, \dots$



b) $\{\operatorname{arctg} nx\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{arctg} x, \operatorname{arctg} 2x, \operatorname{arctg} 3x, \dots$



limita posloupnosti

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \langle 0,1) \\ 1 & \text{pro } x = 1 \end{cases}$$

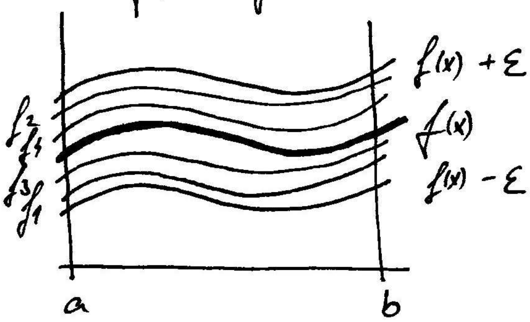
$$f = \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

pokud posloupnost funkcí f_n konverguje k funkci f, píšeme $f_n \longrightarrow f$

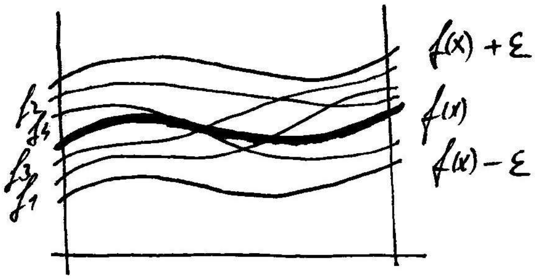
<u>stejnoměrná konvergence</u> ($f_n \rightrightarrows f$)

- funkce f_n konvergují k funkci f na daném intervalu „jako celek"

$f_n \rightrightarrows f$



$f_n \longrightarrow f$



<u>pozn.</u>: pokud spojité $f_n \rightrightarrows f \implies f$ je spojitá (což neplatí u (*) a (**))

<u>řada</u> $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

zajímá nás, kdy <u>řada</u> funkcí stejnoměrně konverguje ke svému součtu $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)\right)$ na intervalu I

<u>odpověď</u>: (Weierstrass) pokud $\lvert f_n(x)\rvert \leq a_n$ pro $\forall x \in I$ $\oplus$ $\sum a_n$ K $\Rightarrow$ $\sum f_n(x)$ K stejnosměrně

<u>př.</u> Dokažte, že řady funkcí konvergují stejnoměrně na uvedených intervalech:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$: $\quad \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ $\oplus$ $\sum \frac{1}{n^2}$ K $\Rightarrow \sum \frac{\sin nx}{n^2}$ K stejnoměrně

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x+n!}$, $x \in \langle 0, \infty)$: $\quad \left|\frac{n^2}{x+n!}\right| \leq \frac{n^2}{n!}$, konverguje ale řada $\sum \frac{n^2}{n!}$?
(vyzkoušíme podílovým kritériem):

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,(n+1)^2}{(n+1)!\,n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,(n+1)^2}{(n+1)\cdot n!\cdot n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0 < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \text{ K}$$

celkem tedy: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x+n!}$ K stejnoměrně

c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 \cdot e^{-nx}$, $x \in \langle 0, \infty)$

$$\lvert x^2 \cdot e^{-nx}\rvert = x^2 \cdot e^{-nx} \leq \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot e^{-n\frac{2}{n}} = \frac{4}{n^2}\cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2}\cdot\frac{1}{n^2} \quad \oplus \quad \sum \frac{4}{e^2}\frac{1}{n^2} \text{ K} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^2 \cdot e^{-nx} \text{ K stejnoměrně}$$

↑ tuto funkci chceme opět omezit zezhora nějakou posloupností (jako u a), b))
musíme najít její maximum

$$(x^2 \cdot e^{-nx})' = 2x \cdot e^{-nx} + x^2 \cdot e^{-nx} \cdot (-n) = 0 \quad / : e^{-nx}$$

$$2x - nx^2 = 0$$

$$x(2 - nx) = 0$$

$x = 0$ nebo $2 - nx = 0$

min $\qquad x = \frac{2}{n}$ ...max a dosadíme zpět

Záměna integrace a sumace $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$!

podmínky: 1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)$

2) všechny f_n spojité na $\langle a,b\rangle$

př. Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos nx\,dx =$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos nx$ ... K stejnoměrně? $\left|\frac{1}{2^n}\cos nx\right| \leq \frac{1}{2^n} \oplus \sum \frac{1}{2^n}$ K $\Rightarrow \sum \frac{1}{2^n}\cos nx$ K stejnom. ✓

$$= \int_0^{2\pi} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos nx\,dx = [x]_0^{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2^n} \cos nx\,dx = 2\pi - 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{1}{n}[\sin nx]_0^{2\pi} =$$

!

$$= 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}\cdot(\sin n\cdot 2\pi - \sin n\cdot 0) = 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}\cdot(0-0) = 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \underline{\underline{2\pi}}$$

b) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot e^{-nx}\,dx =$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot e^{-nx}$ ... K stejnoměrně? Pokud ano, pro která x?

pomocí podílového kritéria: $\displaystyle q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot e^{-(n+1)x}}{n\cdot e^{-nx}} = \lim \frac{n+1}{n}\cdot e^{-x} = e^{-x}$

aby řada K, musí platit $q < 1$

$e^{-x} < 1$

$e^{-x} < e^0$

$-x < 0$

$x > 0 \Rightarrow$ řada konverguje stejnoměrně na $(0,\infty)$

náš integrál je v mezích $\langle \ln 2, \ln 3\rangle \subset (0,\infty)$ ✓ :)

$\Rightarrow$ můžeme prohodit $\sum$ a $\int$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\ln 2}^{\ln 3} n \cdot e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) \left[e^{-nx}\right]_{\ln 2}^{\ln 3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \cdot \left(e^{-n \ln 3} - e^{-n \ln 2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\ln 2^{-n}} - e^{\ln 3^{-n}}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{-n} - 3^{-n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

geometrické řady s kvocienty $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$

pozn.: záměna derivace a sumace: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$

podmínky 1) všechny f_n spojitě diferencovatelné na I

2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ i řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ K stejnom.

Důsledky pro mocninné řady

mějme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $r > 0$ nebo $r = \infty$

- součet $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je spojitý na $(-r, r)$; pokud $\sum a_n x^n$ K v r ... $s(r) = \lim_{x \to r^-} s(x)$
  $-r$ $\quad s(-r) = \lim_{x \to r^+} s(x)$

- derivace $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'$
- integrál $\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n \, dx$

} nemění se poloměr konvergence

př 13) Určete obor konvergence a součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$.
Pomocí získaného výpočtu určete součet řady .... $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| = 1$$

$x = -1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} n (-1)^{n-1} = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots$ nekonverguje

$x = 1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} n \, 1^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n$ ...... D

$\rightarrow (-1, 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(x + x^2 + x^3 + \dots\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1\cdot(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{(1-x)^2}}}$$

geom. řada s kvocientem x

pro $(-1,1)$

pro $x = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = \underline{\underline{4}}$$

př 14 Určete obor konvergence a součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} 2n x^{2n-1}$.
Pomocí získaného výpočtu určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{2n-2}}$

kde řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2n x^{2n-1}$ konverguje? $\rightarrow$ podílové kritérium

(vzorec $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ nelze použít, protože máme x^{2n-1} !)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2(n+1)\, x^{2(n+1)-1}}{2n\, x^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{x^{2n-1}}\right| = \left|1 \cdot x^2\right| = |x^2| = x^2$$

řada K tam, kde $x^2 < 1 \Rightarrow (-1,1)$

$$x = -1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2n \underbrace{(-1)^{2n-1}}_{=-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-2n) \quad \dots\ D$$

$$x = 1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2n (1)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \quad \dots\ D$$

celkem $\underline{\underline{(-1,1)}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^{2n})' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}\right)' = \left(x^2 + x^4 + x^6 + \dots\right)' = \left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)' = \frac{2x(1-x^2) - x^2\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{2n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{\left(1-(\frac{1}{2})^2\right)^2} = \frac{1}{(\frac{3}{4})^2} = \underline{\underline{\frac{16}{9}}}$$

př 15 Určete obor konvergence a součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Pomocí získaného výpočtu určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

$x = -1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ .... K

$x = 1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .... D $\qquad$ celkem $\langle -1, 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int x^{n-1} dx = \int \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} dx = \int (1 + x + x^2 + \dots)\, dx = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln|1-x| + c$$

↑ geom. řada s kvocientem x, $x \in (-1,1)$

pro $x = 0$ je součet řady 0 : $0 = -\ln|1-0| + c \Rightarrow c = 0$

původní řada však K ještě v -1 : $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = s(-1) = \lim_{x \to -1^+} \left(-\ln|1-x|\right) = -\ln 2$

celkově tedy platí : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln|1-x| \quad$ pro $x \in \langle -1, 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n} = -\ln\left|1 - \frac{1}{3}\right| = -\ln \frac{2}{3} = \ln \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \underline{\underline{\ln \frac{3}{2}}}$$