DÚ 12 Plaček – řešení

1) Dokažte stejnoměrnou konvergenci řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$

$\left|\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}\right| \leqq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ ⊕ řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konverguje (např. dle integrálního kritéria) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ $\underline{\underline{K \text{ stejnoměrně}}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $x \in (-1,1)$

$\left|\frac{1}{x^2+n^2}\right| \leqq \frac{1}{n^2}$ ⊕ řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ K $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ $\underline{\underline{K \text{ stejnoměrně}}}$

2) Určete, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ konverguje (absolutně, relativně).

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \neq 0$ protože $\lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{sudá } n}} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^2$ $\Rightarrow$

$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{lichá } n}} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = -e^2$

$\Rightarrow$ řada $\underline{\underline{\text{nekonverguje}}}$ (ani absolutně ani relativně) :-)

3) Určete obor konvergence a součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$. Pomocí získaného výpočtu určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\, 9^n}$.

$\boxed{A}$ obor konvergence (= poloměr konvergence ⊕ krajní body)

$\underline{\underline{1.\ zp.}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n} \xrightarrow{t=x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2n}$

$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2(n+1)}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n} = \underline{\underline{1}}$ $\Rightarrow$ řada konverguje pro $t \in (-1,1)$

$\Rightarrow$ —— // —— pro $x \in (-\sqrt{1}, \sqrt{1})$

$x \in (-1,1)$

2.2p. (podílové kritérium)

$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2(n+1)}}{2(n+1)}}{\frac{x^{2n}}{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n\cdot x^{2n+2}}{(2n+2)\cdot x^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{x^{2n}}\right| =$$

$$= 1\cdot\lim_{n\to\infty}|x^2| = x^2$$; řada konverguje, pokud $q < 1$

$$x^2 < 1 \Rightarrow x \in (-1,1)$$

krajní body

$x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ ... řada D

$x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^{2n}}{2n} = \sum\frac{1}{2n}$ ... řada D

celkem obor konvergence $x \in (-1,1)$

$\boxed{B}$ součet řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\int x^{2n-1}\,dx = \int\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}\,dx = \int(\overbrace{x+x^3+x^5+\dots}^{\text{geometrická řada s kvocientem } x^2})\,dx =$$

$$= \int\frac{x}{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + c$$

určím konstanty c: víme, že $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0^{2n}}{2n} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|1-0^2| + c = 0$

$$0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

celkem tedy: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n} = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2|$ pro $x \in (-1,1)$

$\boxed{C}$ součet řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\,9^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n} = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| \xrightarrow{x=\frac{1}{3}} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\,9^n} = -\frac{1}{2}\ln\left|1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right| = -\frac{1}{2}\ln\frac{8}{9} =$$

$$= \ln\left(\frac{8}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \ln\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{\frac{9}{8}} =$$

$$= \ln\frac{3}{\sqrt{8}} = \ln\frac{3}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{2}}{1\cdot\sqrt{2}} = \ln\frac{3\sqrt{2}}{4}$$