MB102 – 12. demonstrovaná cvičení
Řešení písemky a vektorové prostory funkcí

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

6.5. 2008

Plán přednášky

1. Písemka
2. Domácí úlohy z minulého týdne
3. Návodné úlohy

Příklad 1. *Vyšetřete průběh funkce*

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x - 2}$$

Příklad 1. *Vyšetřete průběh funkce*

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x - 2}$$

Řešení. Def. obor $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, nulové body 3, 4, lok. maximum v bodě $2 - \sqrt{2}$, lok. minimum v bodě $2 + \sqrt{2}$. Na intervalu $(-\infty, 2 - sqrt2)$ rostoucí, na $(-\sqrt{2}, 2)$ klesající, na $(2, 2 + \sqrt{2})$ klesající, na $(2 + \sqrt{2}, \infty)$ rostoucí. Na intervalu $(-\infty, 2)$ konkávní, na $(2, \infty)$ konvexní. Asymptota bez směrnice $x = 2$, asymptota se směrnicí $y = x - 5$. $\square$

Příklad 2. *Rozviňte do mocninné řady funkci* $\sin^2(x)$ *v bodě* $\pi/4$ *a určete pro která* $x \in \mathbb{R}$ *tato řada konverguje.*

Příklad 2. *Rozviňte do mocninné řady funkci* $\sin^2(x)$ *v bodě* $\pi/4$ *a určete pro která* $x \in \mathbb{R}$ *tato řada konverguje.*

Řešení.

$$f(x) = 1/2 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i 2^{2i}}{(2i+1)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2i+1}$$

Řada konverguje pro všechna $x \in R$.

$\square$

Příklad 3. *Určete parametr* $a \in \mathbb{R}$ *tak, aby* $\int_0^1 f(x)$*, kde* $f(x) = a^2x + a\sqrt{1 - x^2} + 1$ *nabýval své extremální hodnoty. Určete o jaký extrém se jedná.*

Příklad 3. *Určete parametr* $a \in \mathbb{R}$ *tak, aby* $\int_0^1 f(x)$*, kde* $f(x) = a^2 x + a\sqrt{1 - x^2} + 1$ *nabýval své extremální hodnoty. Určete o jaký extrém se jedná.*

Řešení. $a = -\pi/4$ $\square$

Příklad 1. *Vyšetřete průběh funkce*

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 3}$$

Příklad 1. *Vyšetřete průběh funkce*

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 3}$$

Řešení. Def. obor $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, nulové body $x = 2$, $x = 5$. Nemá extrémy, na int. $(-\infty, 3)$ konvexní, na $(3, \infty)$ konkávní, asymptota bez směrnice $x = 3$, se směrnicí $y = x - 4$. $\square$

Příklad 2. *Rozviňte do mocninné řady funkci* $\cos^2(x)$ *v bodě* $\pi/4$ *a určete pro která* $x \in \mathbb{R}$ *tato řada konverguje.*

Příklad 2. *Rozviňte do mocninné řady funkci* $\cos^2(x)$ *v bodě* $\pi/4$ *a určete pro která* $x \in \mathbb{R}$ *tato řada konverguje.*

Řešení.

$$f(x) = 1/2 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} 2^{2i}}{(2i+1)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2i+1}.$$

Řada konverguje pro všechna $x \in R$. $\square$

Příklad 3. *Určete parametr* $a \in \mathbb{R}$ *tak, aby* $\int_0^{\pi/4} f(x)\,\mathrm{d}x$, *kde* $f(x) = a^2x + ax^2\sin(x) + 1$ *nabýval své extremální hodnoty. Určete o jaký extrém se jedná.*

Příklad 3. *Určete parametr* $a \in \mathbb{R}$ *tak, aby* $\int_0^{\pi/4} f(x)\,\mathrm{d}x$*, kde* $f(x) = a^2x + ax^2\sin(x) + 1$ *nabýval své extremální hodnoty. Určete o jaký extrém se jedná.*

Řešení. $a = (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} - \frac{(16\sqrt{2}+32)}{\pi^2}.$ □

Plán přednášky

1. Písemka
2. Domácí úlohy z minulého týdne
3. Návodné úlohy

Příklad 1. *Rozviňte do mocninné řady funkci* $f(x) = e^{-3x}$ *v bodě* 0 *a určete, pro která* $x \in \mathbb{R}$ *konverguje. Rozhodněte, zda je tato konvergence stejnoměrná.*

Příklad 1. *Rozviňte do mocninné řady funkci $f(x) = e^{-3x}$ v bodě 0 a určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje. Rozhodněte, zda je tato konvergence stejnoměrná.*

Řešení. $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!} x^n$ Podílovým kriteriem konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Příklad 2. *Udejte příklad posloupnosti spojitých funkcí na uzavřeném intervalu, která bodově konverguje ke spojité funkci na tomto intervalu a přitom tato konvergence není stejnoměrná.*

Příklad 2. *Udejte příklad posloupnosti spojitých funkcí na uzavřeném intervalu, která bodově konverguje ke spojité funkci na tomto intervalu a přitom tato konvergence není stejnoměrná.*

Řešení.

$$f_n = \begin{cases} nx & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{n} \rangle \\ -nx + 2 & \text{pro } x \in \langle \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$\square$

Příklad 3. *Určete následující limitu (postup výpočtu zdůvodněte):*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 3. *Určete následující limitu (postup výpočtu zdůvodněte):*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. $\int_0^\infty \frac{1}{e^x} = 1.$ $\square$

Plán přednášky

1. Písemka
2. Domácí úlohy z minulého týdne
3. Návodné úlohy

Najděte ortonormální bázi vektorového prostoru generovaného funkcemi $\sin(x)$, $\cos(x)$ na intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$.

Určete kolmý průmět a vzdálenost funkce x od tohoto podprostoru.