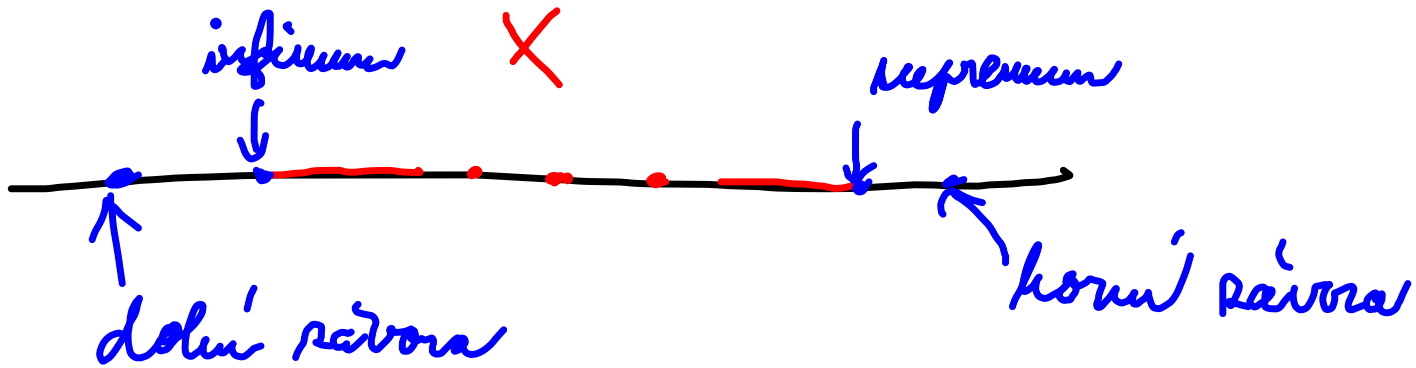
supremum ... nejmenší horní závora dané množiny



$(0,1) \subset \mathbb{R}$, $\inf\,(0,1) = 0$

$\inf\,\langle 0,1\rangle = 0$

$X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$. Tato množina nemá supremum v $\mathbb{Q}$.

Kdyby $s \in \mathbb{Q}$ bylo supremem X, pak by

i) $s < \sqrt{2}$ $(s^2 < 2)$. Pak zvolme $\delta \in (s, \sqrt{2})$, $\delta \in \mathbb{Q}$.

Pak $\delta^2 < 2$, tedy $\delta \in X$, a zároveň $\delta > s$, tedy s není horní závora X

ii) $s > \sqrt{2}$. Pak zvolme $\delta \in (\sqrt{2}, s)$. Pak $\delta^2 > 2 > x^2$, pro $x \in X$, tak δ je horní závora X. Zároveň $\delta < s$, tedy našli jsme menší horní závoru než s ↯

Důkaz

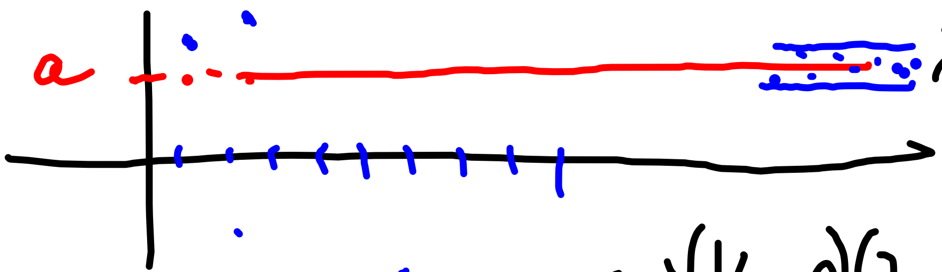
i) $(1) \Rightarrow (2)$. Nechť s je infimum A. Dále nechť $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak $s + \varepsilon$ nemůže být dolní závorou A, tedy $\exists x \in A: s + \varepsilon > x$ /

ii) (2) $\Rightarrow$ (1). Dokážeme obměnou $(1)' \Rightarrow (2)'$

Kdyby s nebylo infimum, protože s je dolní závora, pak by musela existovat větší dolní závora mn. A, řekněme σ. Pro $\varepsilon = \frac{\sigma - s}{2}$ je $s + \frac{\sigma - s}{2} = \frac{s}{2} + \frac{\sigma}{2} < \sigma$ opět dolní závora. Tedy $\forall x \in A: x \geq s + \varepsilon$, tedy neplatí tvrzení (2).

Limity posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$



$\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0): |a_n - a| < \varepsilon$

$a_n = 1 + \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} (n^2) = \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$

Cauchyovská posloupnost:

$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n > n_0)\ |a_m - a_n| < \varepsilon$

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Pro libovolné $a, b \in \mathbb{R}$ je (a, b) otevřená množina:

$\forall x \in (a, b)$, volím $\varepsilon := \min\left\{ \frac{x-a}{2}, \frac{b-x}{2} \right\}$ a potom

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (a, b)$$

Hromadný bod x množiny X je takový $x \in \mathbb{R}$, že

$$\exists \{a_i\}_{i=1}^{\infty},\ a_i \in X,\ a_i \neq x,\ \lim_{n\to\infty} a_n = x$$

Množina X je uzavřená $\Leftrightarrow$ obsahuje všechny svoje hromadné body

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{R} \setminus X$ je otevřená

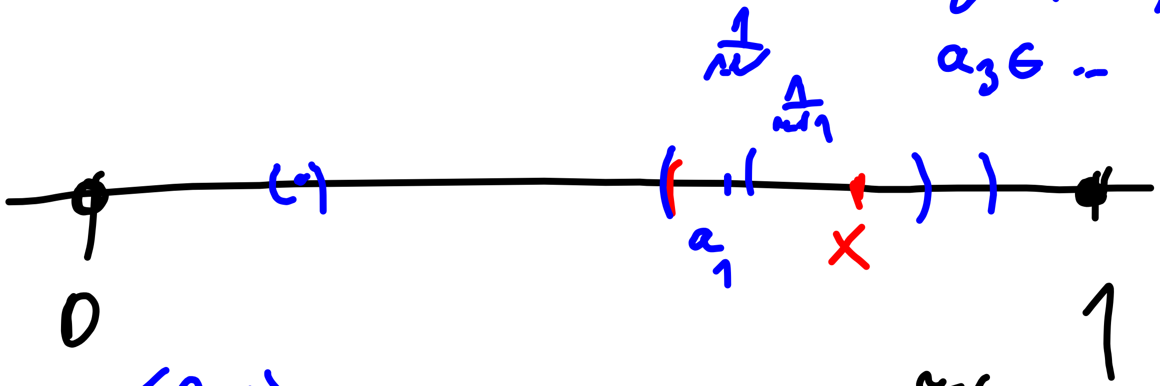
1) $(0,1\rangle$ není otevřená množina (libovolné okolí bodu 1 neleží celé uvnitř $(0,1\rangle$)

$(0,1\rangle$ není uzavřená: 0 je hromadným bodem $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\right)$, $0\notin(0,1\rangle$

$a_1 \in \left(x-\frac{1}{n_1}, x+\frac{1}{n}\right)\setminus x$

$a_2 \in \left(x-\frac{1}{n+1}, x+\frac{1}{n+1}\right)\setminus x$

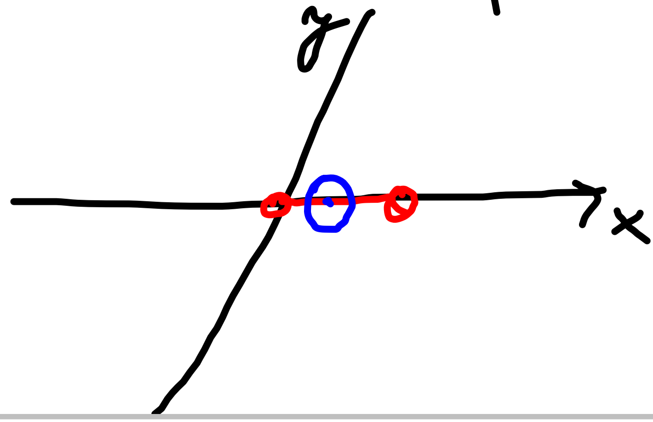
$a_3 \in \ldots$



$\langle 0,1\rangle$

2)

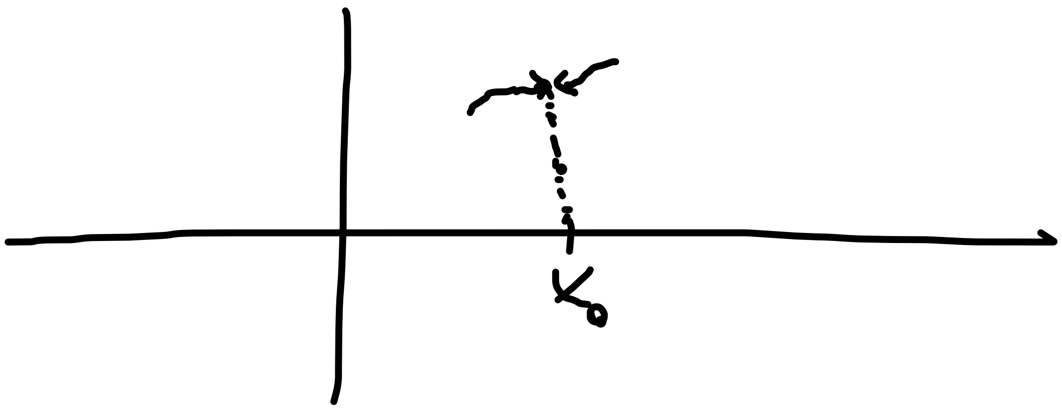
3)



$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ... pro f spojitá v x_0

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = a \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\ x\in(x_0-\delta, x_0),\ |f(x)-a|<\varepsilon$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q} \text{ v základním tvaru} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Tato funkce je spojitá ve všech iracionálních bodech a nespojitá ve všech racionálních bodech:

i) je spojitá v irac. bodech. Nechť $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Funkce je spojitá $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to s} f(x) = 0$ $(= f(s))$

Nechť $\varepsilon > 0$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je takové, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Potom uvažme množinu

$$S = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; q < n,\ \frac{p}{q} \in (s-1, s+1) \right\},$$

volme $\delta := \min \{ s - x \mid x \in S \}$.