$$(\sin 2x)' = 2\cos(2x)$$

$$(\sin 2x)^{(2)} = -4\sin(2x)$$

$$(\sin(2x))^{(3)} = -8\cos(2x)$$

$$(\sin(2x))^{(4)} = 16\sin(2x)$$

$$T_0^4(\sin(2x)) = 0 + 2x - \frac{8}{3!}x^3 =$$

$$= 2x - \frac{4}{3}x^3$$

2) $\left(\cos^2(x)\right)' = -2\cos(x)\sin(x) = -\sin(2x)$

$\left(\cos^2(x)\right)^{(2)} = -2\cos(2x)$

$\left(\cos^2(x)\right)^{(3)} = 4\sin(2x)$

$^{(4)} = 8\cos(2x)$

$^{(5)} = -16\sin(2x)$

$^{(6)} = -32\cos(2x)$

$^{(7)} = 64\sin(2x)$

$$T_0^6\left(\cos^2(x)\right) = 1 + \frac{-2\cdot 1}{2}x^2 + \dots$$

$$\left|\frac{f^{(7)}(c)}{7!}x^7\right| \qquad c\in(0,x)$$

Zjistíme maximální možnou hodnotu $f^{(7)}(x)$ na int $(0, \frac{\pi}{4})$:

$$f^{(7)}(x) = 64\sin(2x))$$

Obor hodnot $|f^{(7)}|$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$ je interval $(0, 64)$. Celkově pro chybu CH máme odhad

$$CH \leq \frac{64}{7!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^7$$

1) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{5(x-1)^2 - 2(x-1)\cdot 5(x-2)}{(x-1)^4} = \frac{5(x-1) - 10(x-2)}{(x-1)^3} = \frac{15-5x}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \iff 15 - 5x = 0 \iff x = 3$$

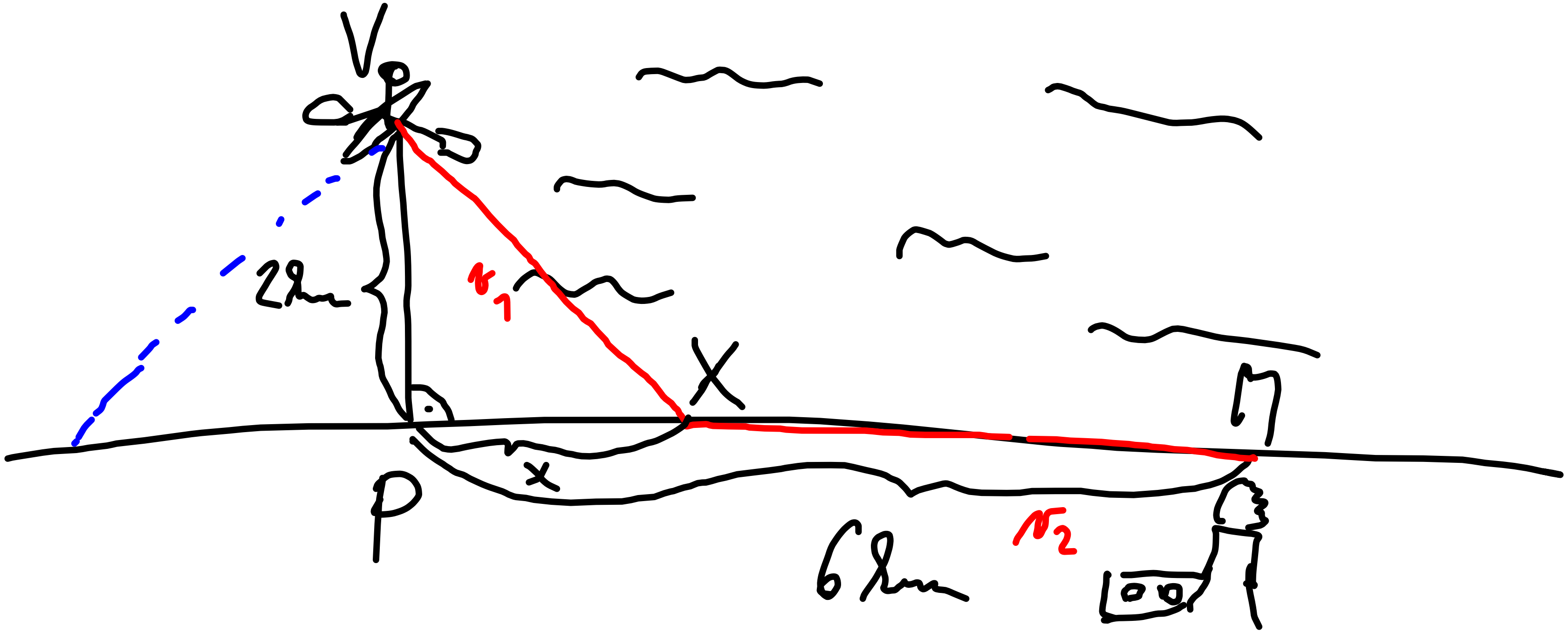
$f'(x)$	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
	$-$	$+$	$-$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

$\Rightarrow$ f má v bodě 3 maximum rovno $f(3) = \frac{5}{4}$

$\hookrightarrow \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(x-1)^2}} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 + x^2} \neq 0$$

na $\mathcal{D}(f)$



Čas T veslaře potřebný k překonání červené dráhy je

$$T(x) = \frac{|VX|}{v_1} + \frac{|XM|}{v_2} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{4} + \frac{6-x}{6}$$

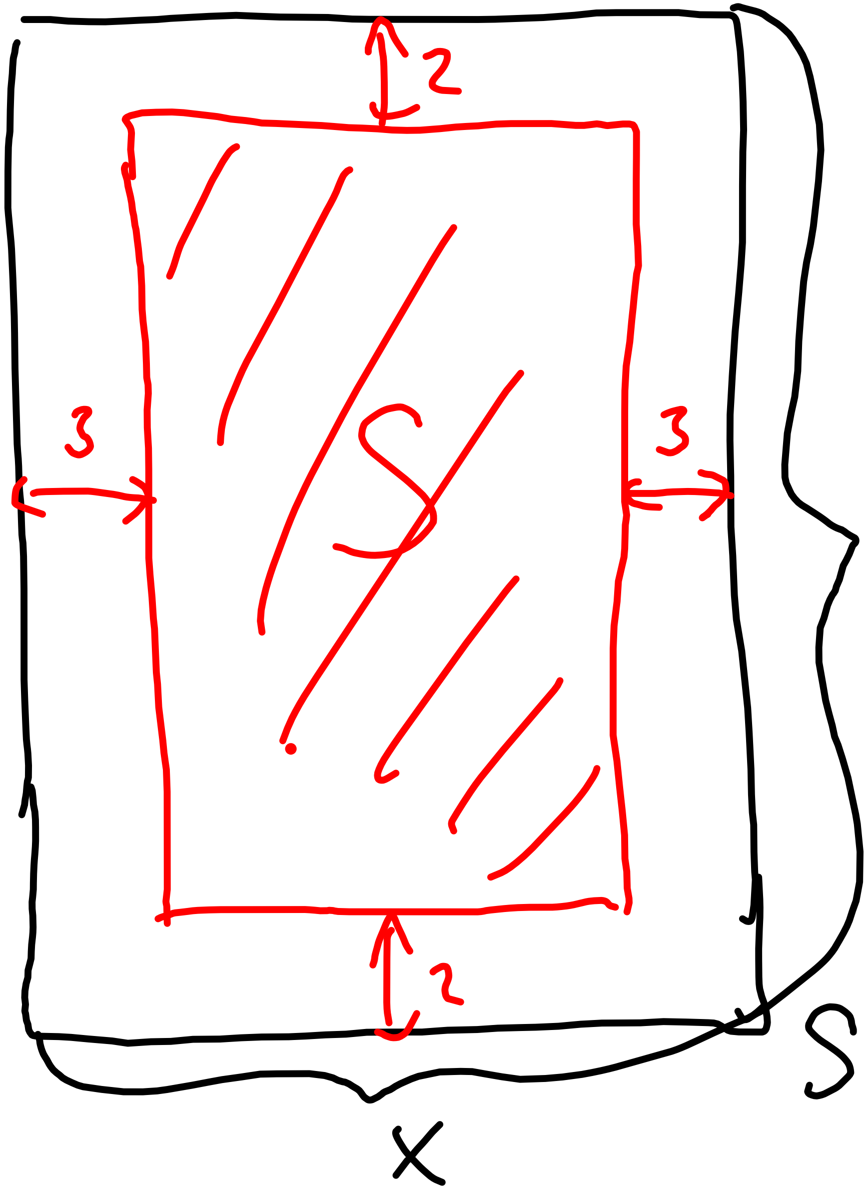
$$T'(x) = \frac{1}{4}\,\frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{6} \overset{?}{=} 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x^2}{4+x^2} = \frac{4}{9} \iff 9x^2 = 16 + 4x^2 \iff$$

$$5x^2 = 16 \implies x = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Z povahy úlohy jde o minimum.



Obsah plochy s diskem je

$$S = (x-6)\cdot\left(\frac{400}{x}-4\right)$$

Hledáme maximum S vzhledem k proměnné x!

$$S(x) = 500 - 4x - \frac{2400}{x} + 24$$

$$S'(x) = -4 + \frac{2400}{x^2} = 0 \iff$$

$$\frac{2400}{x^2} = 4 \iff x^2 = 600$$

$$\Rightarrow x = 10\sqrt{6}$$

$$S''(x) = -\frac{4800}{x^3}$$

$S''(10\sqrt{6}) < 0 \Rightarrow 10\sqrt{6}$ je maximum

1, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2, Nulové body: $x^2 + x + 1 = 0$ nemá řešení v $\mathbb{R}$

čitatel je vždy kladný

f	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
	$-$	$+$

3, Extrémy:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1) - (x^2+x+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + x - 1 - x^2 - x - 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} \overset{?}{=} 0 \iff$$

$$\iff x^2 - 2x - 2 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$f'(x)$	$(-\infty, 1-\sqrt{3})$	$(1-\sqrt{3}, 1)$	$(1, 1+\sqrt{3})$	$(1+\sqrt{3}, \infty)$
	$+$	$-$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

V bodě $(1-\sqrt{3})$ nastává lokální maximum

V bodě $(1+\sqrt{3})$ nastává lokální minimum

Dále vyšetříme intervaly konvexnosti a konkávnosti dané funkce, příp. inflexní body

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x-2)}{(x-1)^3} = \frac{\cancel{2x^2} - 2x - 2x + 2 - \cancel{2x^2} + 4x + 4}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{6}{(x-1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ na celém $\mathcal{D}(f) \Rightarrow f$ nemá infl. bodů.

$f''(x)$	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
	$-$	$+$
	$\frown$	$\smile$

Asymptoty:

a) bez směrnice:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+x+1}{x-1} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+x+1}{x-1} = -\infty$$

fce má asymptotu bez směrnice $x = 1$.

b) se směrnicí

Hledáme přímku $y = kx + q$ tak, aby

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - kx - q| = 0$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x(x-1)} = 1$$

Pokud asymptota existuje, má směrnici 1

$$q = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{(x-1)} - x \right) =$$

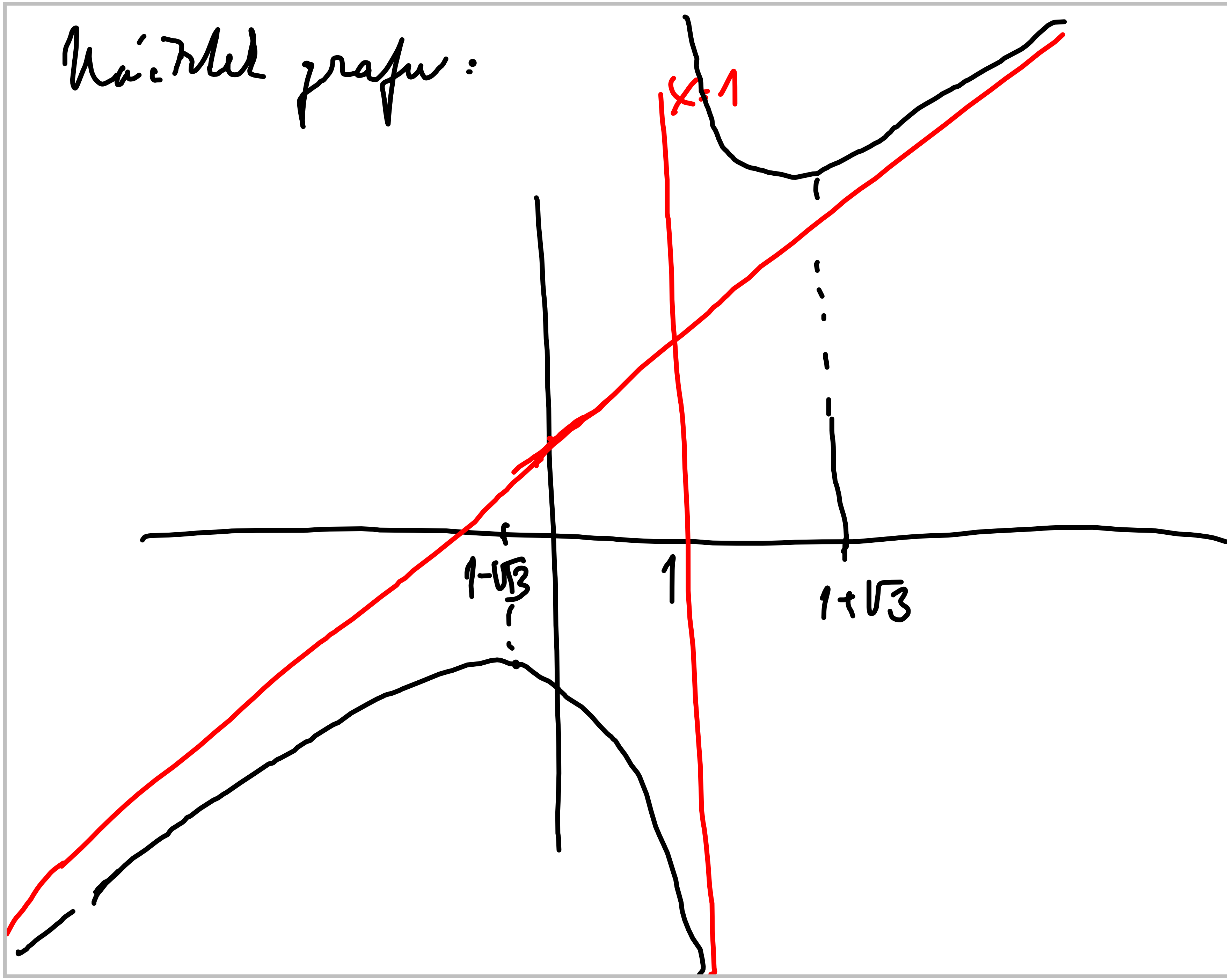
$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x+1-x^2+x}{(x-1)} \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{(x-1)} = 2$$

Asymptota se směrnicí je přímka

$$y = x + 2$$

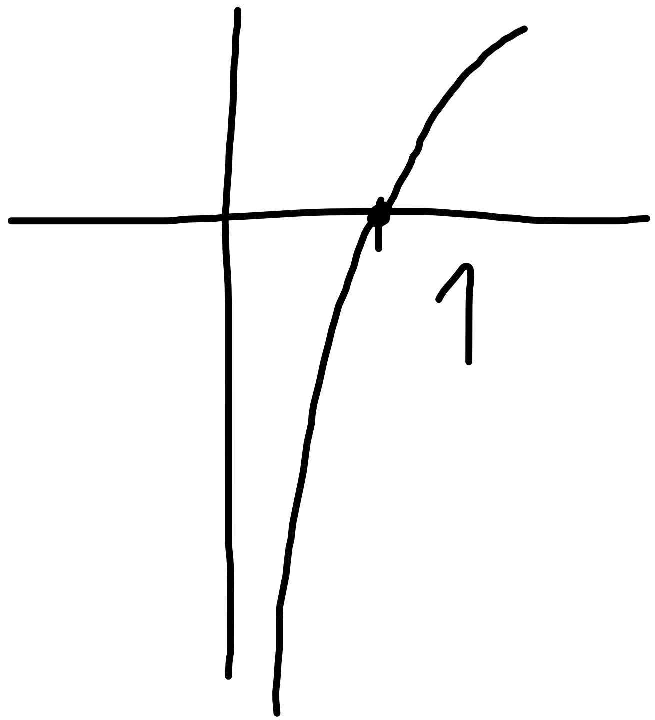
Náčrtek grafu:



1, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Nulové body nemá

f	$(0,1)$	$(1,\infty)$
	$-$	$+$



Vyšetříme extrémy:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x) - \frac{\sqrt{x}}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{\frac{1}{2}\ln(x) - 1}{\sqrt{x}\,\ln^2(x)} \overset{?}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = e^2$$

f'	$(0,1)$	$(1,e^2)$	(e^2,∞)
	$-$	$-$	$+$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{x}\left(\sqrt{x}\ln^2(x)\right) - \left(\ln(x) - 2\right)\left(\frac{\ln^2(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}\ln(x)}{x}\right)}{x\ln^4(x)} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\ln(x) - \left(\ln(x) - 2\right)\left(\frac{1}{2}\ln(x) + 2\right)}{x^{\frac{3}{2}}\ln^3(x)} =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{-\ln^2 x + 8}{x^{\frac{3}{2}}\ln^3(x)} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \ln^2 x = 8 \Leftrightarrow \ln x = \pm 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = e^{\pm 2\sqrt{2}}$$

Ar jsou inflexní body

$f''(x)$	$(0, e^{-2\sqrt{2}})$	$(e^{-2\sqrt{2}}, 1)$	$(1, e^{2\sqrt{2}})$	$(e^{2\sqrt{2}}, \infty)$
	$+$ $\cup$	$-$ $\cap$	$+$ $\cup$	$-$ $\cap$

Asymptoty bez směrnice:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = -\infty$$

se směrnicí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}\,\ln(x)} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - 0\cdot x = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{x} = \infty$$

asymptota se směrnicí neexistuje.

náčrtek grafu