

Jméno a příjmení:	
-------------------	--

Příklad číslo:	1	2	3	4	$\Sigma$
Počet bodů:					

### Skupina B

**Příklad** V prostoru reálných funkcí na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ , je dán vektorový podprostor  $\langle \cos(x), x \rangle$ . Doplňte funkci  $\cos(x)$  na jeho ortogonální bázi a určete projekci funkce  $\frac{1}{3} \cos(x)$  na tento podprostor (ve skalárním součinu uvažovaném na přednášce).

**Řešení.**  $\cos(x), \frac{4}{\pi} \cos(x) + x$ . Projekce funkce  $\frac{1}{3} \cos(x)$  nezmění, neboť leží v prostoru samotném.  $\square$

**Příklad 2.** Určete konvoluci  $f_1 * f_2$  funkcí

$$f_1 = \begin{cases} 1-x & \text{pro } x \in \langle -2, 1 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

**Řešení.**

$$f_1 * f_2(t) = \begin{cases} \int_0^{t+1} (1-(t-x)^2)x \, dx & = \int_{-1}^t (1-x^2)(t-x) \, dx & = -\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{4} & \text{pro } t \in \langle -1, 0 \rangle \\ \int_0^1 (1-(t-x)^2)x \, dx & = \int_{t-1}^t (1-x^2)(t-x) \, dx & = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{1}{4} & \text{pro } t \in \langle 0, 1 \rangle \\ \int_{t-1}^1 (1-(t-x)^2)x \, dx & = \int_{t-1}^1 (1-x^2)(t-x) \, dx & = \frac{1}{12}t^4 - t^2 + \frac{4}{3}t & \text{pro } t \in \langle 1, 2 \rangle \\ 0 & & & \text{jinak} \end{cases}$$

$\square$

**Příklad 3.** Rozviňte do Furierovy řady funkci  $\cos^2(x)$  na intervalu  $\langle -\pi, \pi \rangle$ .

**Řešení.**  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$ .

$\square$

**Příklad 4.** Určete vzdálenost bodu  $[-4, -2] \in \mathbb{R}^2$  od paraboly  $y = x^2 + x + 1$ .

**Řešení.** Nejbližší bod  $[-1, 1]$ , vzdálenost  $3\sqrt{2}$ .

$\square$