1. Práce s polynomy $x \in \mathbb{R}, \mathbb{Q}$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

- kořeny $x \in \mathbb{K}, f(x) = 0$
- hodnoty $x \longmapsto f(x) = y$
- interpolace dat

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$$

Lagrangeův polynom:

jediný polynom stupně n s vlastností

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n \quad (x_i \neq x_j, \; i \neq j)$$

Příklad 1. Najděte LP po datech

$(1,2), (3,4)$.

$x_0 \; y_0 \quad x_1 \; y_1$

DOSAZENÍM

Řešení: 1) $ax+b = f(x)$

$$\left.\begin{aligned} a\cdot 1 + b &= 2 \quad \cdot 3 \\ a\cdot 3 + b &= 4 \quad \cdot (-1) \end{aligned}\right\}$$

$3b - b = 2$

$b = 1, \quad a = 1$

$$\Rightarrow f(x) = x + 1$$

2) FORMULÍ: $f_0(x) = \dfrac{(x-3)}{(1-3)}$ $\qquad f_1(x) = \dfrac{(x-1)}{(3-1)}$

$$\Rightarrow f(x) = 2\cdot f_0(x) + 4\cdot f_1(x) = \underbrace{-(x-3) + 2(x-1)}_{x+1}$$

Příklad 2 LP interpolující $(2,4),(3,1),(5,7)$.

Řešení: podle vzorce 2:

$$f(x) = 4\cdot\frac{(x-3)(x-5)}{(2-3)(2-5)} + 1\cdot\frac{(x-2)(x-5)}{(3-2)(3-5)}$$

$$+\,7\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{(5-2)(5-3)}$$

$-64+21-35$

$$= \frac{4}{3}(x-3)(x-5) - \frac{1}{2}(x-2)(x-5)$$

$$+\,\frac{7}{6}(x-2)(x-3) = 2x^2 - 13x + 22$$

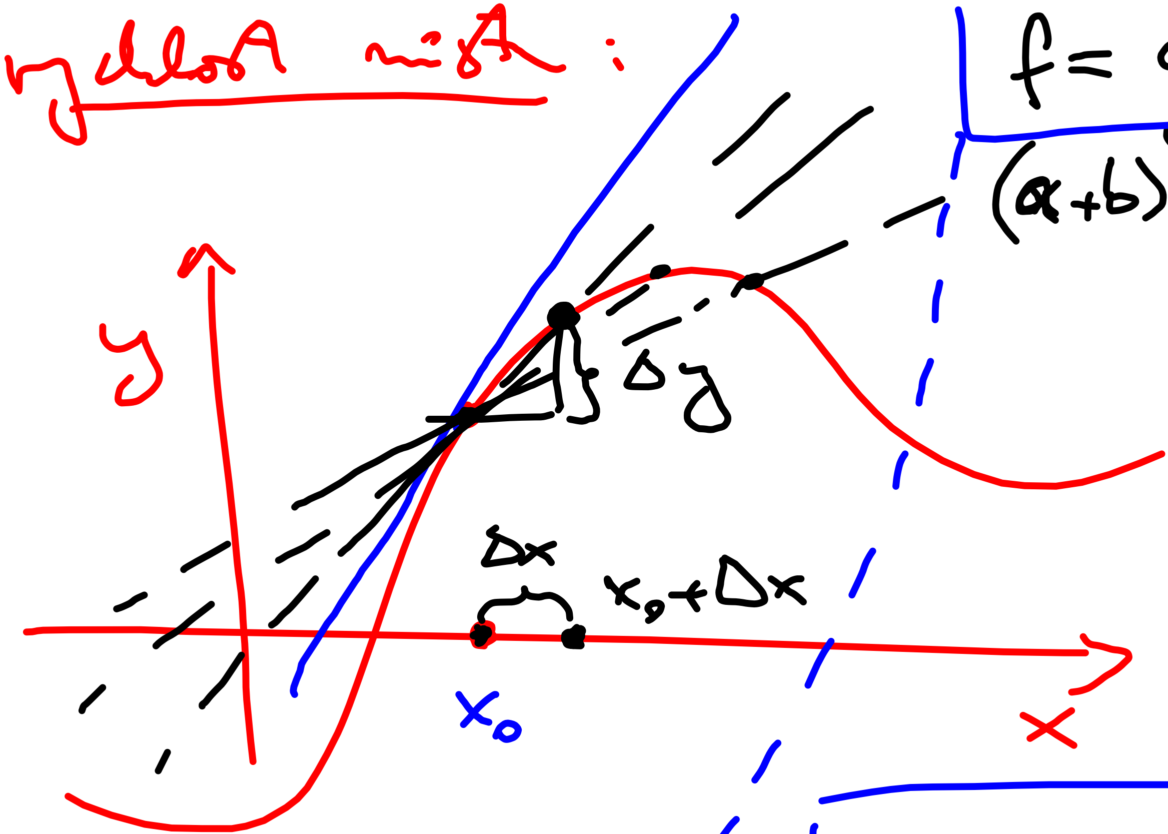
Příklad 2a) Jak rychle roste LP v bodě $x=4$?

$$f'(x) = 4x - 13\Big|_{x=4} \Rightarrow f'(4) = 3.$$

rychlost změny:

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_0$$

$$(a+b)^k = a^k + k a^{k-1} b + \dots \binom{k}{l} a^{k-l} b^l + \dots + b^k$$



$f(x) = y$

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \boxed{n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 1 \cdot a_1} + \cancel{\Delta x \cdot (?)}$$

$f'(x)$ derivace polynomu

zmizí pro $\Delta x \sim 0$

Co vědět o polynomech:

1) Nad komplexními čísly (tj. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) má každý nenulový polynom kořen.

2) Polynom stupně k má nad $\mathbb{C}$ právě k kořenů.

$f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots$ $\neq 0$

3) Pro polynomy nad $\mathbb{K}$ vždy funguje dělení se zbytkem: těleso $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$

$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$, stupeň r je menší než g

stupeň n stupeň m zbytek

4) Nad $\mathbb{R}$ kořeny mít nemusí!

Příklad 3: $f(x) = x^3 + x + 1$ $\quad q \cdot g \cong f$

$g(x) = x^2 + 1$ $\quad q = ?$

$$(x^{\overset{7}{3}} + x + 1) : (x^2 + 1) = x$$

$$x^3 + x$$

$$\boxed{0 \quad 0 \quad 1}$$

r

$$f(x) - \tilde{q}(x) \cdot g(x) =$$

$$f(x) = x \cdot g(x) + 1$$

$$f(x_0) = r \in \mathbb{C}$$

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) = q(x) \cdot (x - x_0) + r(\cancel{x})$$

stupeň $n-1$ $\quad$ stupeň $=1$ $\quad$ stupeň 0

4

$$(x^6 + x + 1) : (x^2 + 1) = \boxed{x^4 - x^2 + 1}$$

$f(x) - \tilde{q}(x) \cdot g(x)$

výsledek

$$\begin{array}{l}
x^6 + x^4 \\
\hline
-x^4 + x + 1 \\
-x^4 - x^2 \\
\hline
x^2 + x + 1 \\
x^2 + 1 \\
\hline
x
\end{array}$$

x — zbytek

Hornerovo schéma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$b_n := a_n$$

$$b_{n-1} := a_{n-1} + b_n x_0$$

$$\vdots$$

$$b_0 := a_0 + b_1 x_0$$

$$b_0 = f(x_0)$$

$$f(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots x(\overbrace{a_{n-1} + \underbrace{a_n}_{b_n} x}^{b_{n-1}}) \dots)$$

5

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x - 1 \qquad \boxed{x_0 = 3}$$

x_0	x^3	x^2	x^1	x^0
3	2	-6	2	-1
		6	0	6
	2	0	2	$\boxed{5} = f(x_0)$

[illegible]

koeficienty v podílu $f(x) : (x - x_0)$

([illegible] [illegible])

$$f(x) = (2x^2 + 2)(x - 3) + 5$$

6)

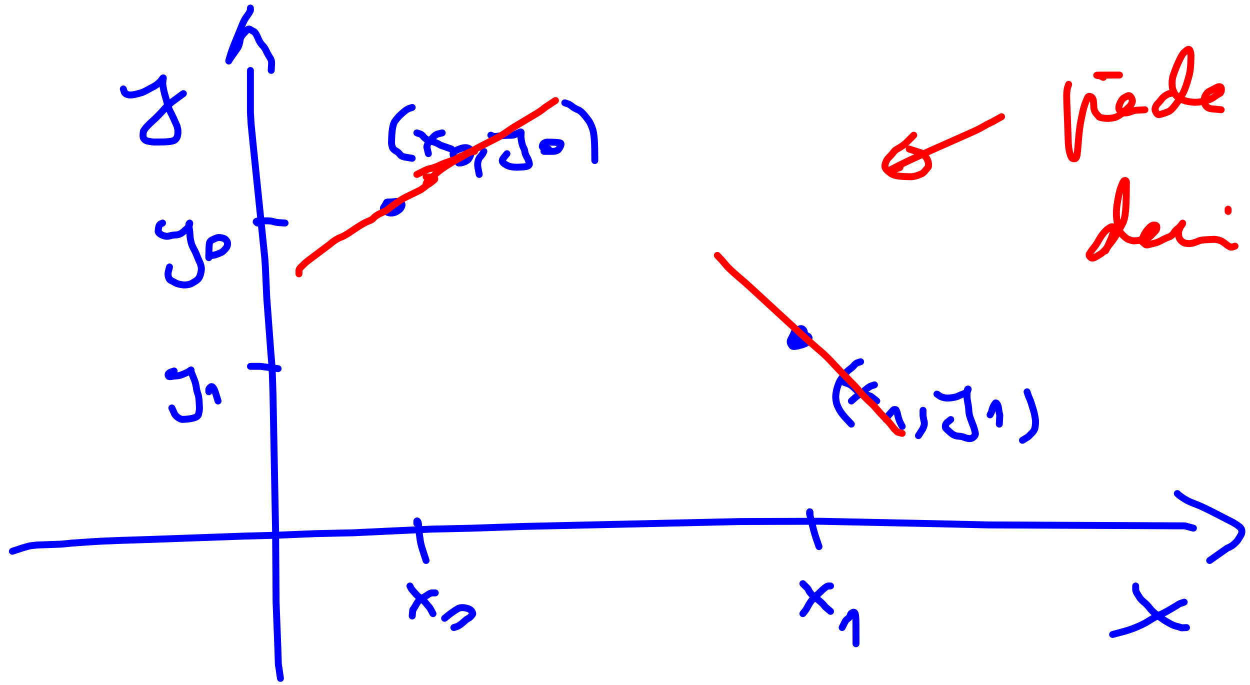
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \qquad x = 2$

x_0	x^3	x^2	x^1	x^0
2	1	-6	11	-6
		$+2$	-8	6
	1	-4	3	0

$x=2$ je kořen

$f(x) = (x^2 - 4x + 3)(x - 2)$

Interpolace s derivacemi:



předepsané derivace y_0', y_1'

$\Rightarrow$ Hermiteovy interpolační polynomy

Obecně: $(x_0, y_0^0, y_0^1, \dots, y_0^{k_0})$

$(x_1, y_1^0, y_1^1, \dots, y_1^{k_1})$

$\vdots$

$(x_n, \dots)$

Obvykle: $(x_0, y_0, y_0'), \dots, (x_n, y_n, y_n')$

Příklad 7. $f(x)$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$

$f'(1) = 4$, $f'(2) = 1$

Řešení:

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$$

dosazení:

$$\begin{aligned} a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 1 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= 0 \\ 3a_3 + 2a_2 + a_1 &= 4 \\ 12a_3 + 4a_2 + a_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = 7x^3 - 33x^2 + 49x - 22$$

Lagrangeův: $x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{i \neq j} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

v x_i je 1

v x_j je 0

$j \neq i$

Hermiteův:

Interpolace může sloužit pro aproximaci:

?

Příklad 8: Aproximujte polynomem 2. stupně funkci $\sqrt{x}$ na intervalu $[0,4]$.

Řešení pomocí interpolace: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, tj. Lagr. interp. pro $(0,\sqrt{0})$, $(1,\sqrt{1})$, $(4,2)$ $\Rightarrow f(x) = 0 \cdot \ldots + 1 \cdot \frac{x(x-4)}{3} + 2 \cdot \frac{x(x-1)}{12}$

$= \frac{1}{3} x(x-4) + \frac{1}{6} x(x-1)$