Druhá sada domácích úloh, Matematika IV, jarní semestr 2007
k odevzdání v týdnu 5.-9.března 2007

Příklad 1. *Určete všechny podgrupy grupy invertibilních čtvercových matic nad* $\mathbb{Z}_2$ *(vzhledem k násobení matic), viz Sada 1. Je tato grupa isomorfní grupě* S_3*? Zdůvodněte (buď najděte isomorfismus, nebo udejte důvod, proč neexistuje).*

Příklad 2. *Rozhodněte (se zdůvodněním) o následujících předpisech, zda jsou zobrazeními, případně homomorfismy či isomorfismy grup:*

1. $f : (\mathbb{Z}_7, +) \to (\mathbb{Z}_8, +)$, $f([a]_{\mathbb{Z}_7}) = [a]_{\mathbb{Z}_8}$
2. $f : (\mathbb{Z}_7^*, \cdot) \to (\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot)$, $f([a]_{\mathbb{Z}_7^*}) = [a]_{\mathbb{Z}_{14}^*}$
3. $f : (\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot) \to (\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$, $f([a]_{\mathbb{Z}_{14}^*}) = [a]_{\mathbb{Z}_7^*}$
4. $f : (\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot) \to (\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$, $f([a]_{\mathbb{Z}_{15}^*}) = [3a]_{\mathbb{Z}_{15}^*}$
5. $f : (\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot) \to (\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$, $f([a]_{\mathbb{Z}_{15}^*}) = [4a]_{\mathbb{Z}_{15}^*}$
6. $f : (\mathbb{Z}_k^*, \cdot) \to (\mathbb{Z}_k^*, \cdot)$, $f([a]_{\mathbb{Z}_k^*}) = [l \cdot a]_{\mathbb{Z}_k^*}$, $k, l \in \mathbb{N}, k, l > 1$
7. $f : S_k \to S_k$, $f(\sigma) = \sigma^2$

Příklad 3. *Rozhodněte, zda jsou podgrupy generované*

- *cyklem* $(1, 2, 3)$ *v* S_3,
- *cyklem* $(1, 2, 3, 4)$ *v* S_4
- *cyklem* $(1, 2, 3)$ *v* A_4

normální. V posledním případě určete pravé třídy rozkladu A_4 *podle uvažované podgrupy. Určete, kdy je podmnožina všech cyklů délky* n *spolu s identickou permutací podgrupou grupy* S_n*. Ukažte, že se pak jedná o normální podgrupu.*