

Uspořádané množiny:

Nechť \mathcal{A} je tvořena všemi konečnými podmnožinami množiny \mathbb{N} , jejichž prvky jsou nesoudělná čísla.

1. Rozhodněte, které z následujících množin patří do \mathcal{A} :

- | | | |
|-------------------|-------------------------|-----------------|
| (a) $\{2,3,8\}$ | (c) $\{2,5\}$ | (e) $\{4,6,8\}$ |
| (b) $\{2,3,5,8\}$ | (d) $\{2,3,4,5,\dots\}$ | (f) $\{2,3\}$ |

2. \mathcal{A} tvoří spolu s uspořádáním inkluzí *poset* (částečně uspořádanou množinu). Nechť \mathcal{B} je tvořena těmi množinami z \mathcal{A} , které patří do \mathcal{A} . Nakreslete hasseovský diagram (\mathcal{B}, \subseteq) .

3. Dokažte, že pokud v uspořádané množině existuje nejmenší (největší) prvek, pak je určen jednoznačně. Platí totéž i o minimálním (maximálním) prvku?

4. Množina $\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$ uspořádána podle relace „být násobkem“. Určete

- (a) maximální prvky
- (b) minimální prvky
- (c) největší a nejmenší prvek

5. Uvažme podmnožinu racionálních čísel $A = \{x \in \mathbb{Q}; x^3 < 3\}$. Rozhodněte zda:

- (a) Existuje horní (dolní) závora A .
- (b) Existuje supremum (infimum) A

Booleovské algebry: Booleovská algebra je čtveřice $(K, \wedge, \vee, ')$, splňující pro $A, B, C \in K$:

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C, \quad A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C \quad (1)$$

$$A \wedge B = B \wedge A, \quad A \vee B = B \vee A \quad (2)$$

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C),$$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad (3)$$

$$\text{existuje } 0 \text{ tak, že } A \vee 0 = A \quad (4)$$

$$\text{existuje } 1 \text{ tak, že } A \wedge 1 = A \quad (5)$$

$$A \wedge A' = 0, \quad A \vee A' = 1. \quad (6)$$

1. Dokažte, že v booleovské algebře platí:

$$(a) \quad A \wedge 0 = 0, \quad A \vee 1 = 1$$

$$(b) \quad (\text{absorpce}) \quad A \wedge (A \vee B) = A, \quad A \vee (A \wedge B) = A$$

$$(c) \quad (\text{idempotence}) \quad A \wedge A = A, \quad A \vee A = A$$

$$(d) \quad (\text{de Morganova pravidla}) \quad (A \wedge B)' = A' \vee B', \quad (A \vee B)' = A' \wedge B'$$

$$(e) \quad (\text{involuce}) \quad (A')' = A.$$

2. Nakreslete systém přepínačů odpovídající booleovskému výrazu

$$[(A \wedge B) \vee C] \wedge [D \vee (A' \wedge B)].$$

3. Zjednodušte systém přepínačů na obrázku.

4. Navrhněte z přepínačů „volební skříňku“ pro tři voliče tak, že výstup bude respektovat vůli většiny.

Atom v Booleově algebře je takový prvek A , že všechny prvky $B \in K$ splňují buď $A \leq B$ nebo $A \wedge B = 0$.

Každý prvek v konečné booleovské algebře lze zapsat jako supremum atomů (a to jednoznačně až na pořadí).

1. Určete disjunktivní normální formu výrazu

$$((A \wedge B) \vee C)' \wedge (A' \vee (B \wedge C \wedge D)).$$