

MB104 Matematika IV - 2. demonstované cvičení

Jan Herman

27. února 2008

Obsah

- 1 Krátké opakování
- 2 Podgrupy
- 3 Homomorfismy

Co už byste měli umět

- **grupa** - asociativita, neutrální prvek, inverzní prvky
- **podgrupa** - podmnožina, která je sama grupou
- **homomorfismus**
 - zobrazení zachovávající operaci
 - $f : (G, \cdot) \rightarrow (H, \circ); f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$
- **permutace**
 - bijekce (konečné) množiny na sebe
 - rozklad na nezávislé cykly
 - parita

Co už byste měli umět

- **grupa** - asociativita, neutrální prvek, inverzní prvky
- **podgrupa** - podmnožina, která je sama grupou
- **homomorfismus**
 - zobrazení zachovávající operaci
 - $f : (G, \cdot) \rightarrow (H, \circ); f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$
- **permutace**
 - bijekce (konečné) množiny na sebe
 - rozklad na nezávislé cykly
 - parita

Co už byste měli umět

- **grupa** - asociativita, neutrální prvek, inverzní prvky
- **podgrupa** - podmnožina, která je sama grupou
- **homomorfismus**
 - zobrazení zachovávající operaci
 - $f : (G, \cdot) \rightarrow (H, \circ); f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$
- **permutace**
 - bijekce (konečné) množiny na sebe
 - rozklad na nezávislé cykly
 - parita

Co už byste měli umět

- **grupa** - asociativita, neutrální prvek, inverzní prvky
- **podgrupa** - podmnožina, která je sama grupou
- **homomorfismus**
 - zobrazení zachovávající operaci
 - $f : (G, \cdot) \rightarrow (H, \circ); f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$
- **permutace**
 - bijekce (konečné) množiny na sebe
 - rozklad na nezávislé cykly
 - parita

Dihedrální grupa řádu 8 - symetrie čtverce

Example

Popište grupu symetrií čtverce a určete všechny její podgrupy.

Remark

*Tato grupa se nazývá dihedrální grupa řádu 8 a značí se D_8 .
Obdobně grupa symetrií pravidelného n -úhelníka se nazývá dihedrální grupa řádu $2n$ a značí se D_{2n} .*

Dihedrální grupa řádu 8 - symetrie čtverce

Example

Popište grupu symetrií čtverce a určete všechny její podgrupy.

Remark

*Tato grupa se nazývá dihedrální grupa řádu 8 a značí se D_8 .
Obdobně grupa symetrií pravidelného n -úhelníka se nazývá dihedrální grupa řádu $2n$ a značí se D_{2n} .*

Podgrupy generované množinou

Theorem

Průnik libovolného systému podgrup grupy G je opět podgrupa G .

Proof

Uzavřenost, přítomnost neutrálního i inverzních prvků plyne z vlastností průniku.

Definition

Nechť (G, \cdot) je grupa a $M \subseteq G$. Nejmenší (vzhledem k inkluzi) podgrupu G , která obsahuje M , nazýváme podgrupa generovaná množinou M . Značíme $\langle M \rangle$.

Podgrupy generované množinou

Theorem

Průnik libovolného systému podgrup grupy G je opět podgrupa G .

Proof

Uzavřenost, přítomnost neutrálního i inverzních prvků plyne z vlastností průniku.

Definition

Nechť (G, \cdot) je grupa a $M \subseteq G$. Nejmenší (vzhledem k inkluzi) podgrupu G , která obsahuje M , nazýváme podgrupa generovaná množinou M . Značíme $\langle M \rangle$.

Podgrupy generované množinou

Theorem

Průnik libovolného systému podgrup grupy G je opět podgrupa G .

Proof

Uzavřenost, přítomnost neutrálního i inverzních prvků plyne z vlastností průniku.

Definition

Nechť (G, \cdot) je grupa a $M \subseteq G$. Nejmenší (vzhledem k inkluzi) podgrupu G , která obsahuje M , nazýváme podgrupa generovaná množinou M . Značíme $\langle M \rangle$.

Podgrupy generované množinou

Theorem

$$\langle M \rangle = \left\{ a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \mid \forall i : (a_i \in M \vee a_i^{-1} \in M) \right\}$$

Example

Určete podgrupu Σ_8 generovanou množinou

$$M = \{(1, 8, 2, 3, 5) \circ (1, 2, 6, 7, 8), (4, 7, 6, 2) \circ (2, 4, 8)\},$$

respektive $N =$

$$\{(4, 5, 2, 1) \circ (4, 6, 3, 1, 5, 2), (4, 5, 2, 1) \circ (4, 5, 6) \circ (2, 1, 3)\}.$$

Podgrupy generované množinou

Theorem

$$\langle M \rangle = \left\{ a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \mid \forall i : (a_i \in M \vee a_i^{-1} \in M) \right\}$$

Example

Určete podgrupu Σ_8 generovanou množinou

$$M = \{(1, 8, 2, 3, 5) \circ (1, 2, 6, 7, 8), (4, 7, 6, 2) \circ (2, 4, 8)\},$$

respektive $N =$

$$\{(4, 5, 2, 1) \circ (4, 6, 3, 1, 5, 2), (4, 5, 2, 1) \circ (4, 5, 6) \circ (2, 1, 3)\}.$$

Podgrupy generované množinou

Example

Určete podgrupu $(GL_2(\mathbb{Z}_2), \cdot)$ (grupy regulárních matic 2×2 nad \mathbb{Z}_2) generovanou množinou $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, respektive

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Example

Určete podgrupu (\mathbb{C}, \cdot) generovanou prvkem $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Podgrupy generované množinou

Example

Určete podgrupu $(GL_2(\mathbb{Z}_2), \cdot)$ (grupy regulárních matic 2×2 nad \mathbb{Z}_2) generovanou množinou $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, respektive

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Example

Určete podgrupu (\mathbb{C}, \cdot) generovanou prvkem $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Homomorfismy

Example

Dokažte, že (\mathbb{Z}_7^*, \cdot) je izomorfní s $(\mathbb{Z}_6, +)$ a $(\mathbb{Z}_8^\times, \cdot)$ s $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$.

Example

Dokažte, že předpis $f([a]_{20}) = (1, 2, 3, 4, 5)^a$ definuje homomorfismus $f : (\mathbb{Z}_{20}, +) \rightarrow (\Sigma_7, \circ)$.

Homomorfismy

Example

Dokažte, že (\mathbb{Z}_7^*, \cdot) je izomorfní s $(\mathbb{Z}_6, +)$ a $(\mathbb{Z}_8^\times, \cdot)$ s $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$.

Example

Dokažte, že předpis $f([a]_{20}) = (1, 2, 3, 4, 5)^a$ definuje homomorfismus $f : (\mathbb{Z}_{20}, +) \rightarrow (\Sigma_7, \circ)$.

Homomorfismy

Lemma

Nechť $f : G \rightarrow H$ je homomorfismus grup. Potom platí:
 $\forall a \in G : \text{ord}_H(f(a)) \mid \text{ord}_G(a).$

Example

Najděte všechny homomorfismy z grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ do grupy $(\Sigma_3, \circ).$

Example

Najděte všechny homomorfismy z grupy (Σ_3, \circ) do grupy $(\mathbb{Z}_6, +).$

Homomorfismy

Lemma

Nechť $f : G \rightarrow H$ je homomorfismus grup. Potom platí:
 $\forall a \in G : \text{ord}_H(f(a)) \mid \text{ord}_G(a).$

Example

Najděte všechny homomorfismy z grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ do grupy $(\Sigma_3, \circ).$

Example

Najděte všechny homomorfismy z grupy (Σ_3, \circ) do grupy $(\mathbb{Z}_6, +).$

Homomorfismy

Lemma

Nechť $f : G \rightarrow H$ je homomorfismus grup. Potom platí:
 $\forall a \in G : \text{ord}_H(f(a)) \mid \text{ord}_G(a)$.

Example

Najděte všechny homomorfismy z grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ do grupy (Σ_3, \circ) .

Example

Najděte všechny homomorfismy z grupy (Σ_3, \circ) do grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$.