MB104 Matematika IV - 2. demonstrované cvičení

Jan Herman

27. února 2008

Obsah

Co už byste měli umět

- grupa - asociativita, neutrální prvek, inverzní prvky
- podgrupa - podmnožina, která je sama grupou
- homomorfismus
  - zobrazení zachovávající operaci
  - $f : (G, \cdot) \to (H, \circ); f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$
- permutace
  - bijekce (konečné) množiny na sebe
  - rozklad na nezávislé cykly
  - parita

Co už byste měli umět

- grupa - asociativita, neutrální prvek, inverzní prvky
- podgrupa - podmnožina, která je sama grupou
- homomorfismus
  - zobrazení zachovávající operaci
  - $f : (G, \cdot) \to (H, \circ); f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$
- permutace
  - bijekce (konečné) množiny na sebe
  - rozklad na nezávislé cykly
  - parita

Co už byste měli umět

- grupa - asociativita, neutrální prvek, inverzní prvky
- podgrupa - podmnožina, která je sama grupou
- homomorfismus
  - zobrazení zachovávající operaci
  - $f : (G, \cdot) \to (H, \circ); f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$
- permutace
  - bijekce (konečné) množiny na sebe
  - rozklad na nezávislé cykly
  - parita

Co už byste měli umět

- grupa - asociativita, neutrální prvek, inverzní prvky
- podgrupa - podmnožina, která je sama grupou
- homomorfismus
  - zobrazení zachovávající operaci
  - $f : (G, \cdot) \to (H, \circ);\ f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$
- permutace
  - bijekce (konečné) množiny na sebe
  - rozklad na nezávislé cykly
  - parita

Dihedrální grupa řádu 8 - symetrie čtverce

Example

Popište grupu symetrií čtverce a určete všechny její podgrupy.

Remark

Tato grupa se nazývá dihedrální grupa řádu 8 a značí se D_8. Obdobně grupa symetrií pravidelného n-úhelníka se nazývá dihedrální grupa řádu $2n$ a značí se D_{2n}.

Dihedrální grupa řádu 8 - symetrie čtverce

Example

Popište grupu symetrií čtverce a určete všechny její podgrupy.

Remark

Tato grupa se nazývá dihedrální grupa řádu 8 a značí se D_8. Obdobně grupa symetrií pravidelného n-úhelníka se nazývá dihedrální grupa řádu $2n$ a značí se D_{2n}.

Podgrupy generované množinou

Theorem

Průnik libovolného systému podgrup grupy G je opět podgrupa G.

Proof

Uzavřenost, přítomnost neutrálního i inverzních prvků plyne z vlastností průniku.

Definition

Nechť $(G, \cdot)$ je grupa a $M \subseteq G$. Nejmenší (vzhledem k inkluzi) podgrupu G, která obsahuje M, nazýváme podgrupa generovaná množinou M. Značíme $\langle M \rangle$.

Podgrupy generované množinou

Theorem

Průnik libovolného systému podgrup grupy G je opět podgrupa G.

Proof

Uzavřenost, přítomnost neutrálního i inverzních prvků plyne z vlastností průniku.

Definition

Nechť $(G, \cdot)$ je grupa a $M \subseteq G$. Nejmenší (vzhledem k inkluzi) podgrupu G, která obsahuje M, nazýváme podgrupa generovaná množinou M. Značíme $\langle M \rangle$.

Podgrupy generované množinou

Theorem

Průnik libovolného systému podgrup grupy G je opět podgrupa G.

Proof

Uzavřenost, přítomnost neutrálního i inverzních prvků plyne z vlastností průniku.

Definition

Nechť $(G, \cdot)$ je grupa a $M \subseteq G$. Nejmenší (vzhledem k inkluzi) podgrupu G, která obsahuje M, nazýváme podgrupa generovaná množinou M. Značíme $\langle M \rangle$.

Podgrupy generované množinou

Theorem

$$\langle M\rangle = \left\{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n | \forall i : \left(a_i \in M \vee a_i^{-1} \in M\right)\right\}$$

Example

Určete podgrupu Σ_8 generovanou množinou $M = \{(1,8,2,3,5) \circ (1,2,6,7,8), (4,7,6,2) \circ (2,4,8)\}$, respektive $N = \{(4,5,2,1) \circ (4,6,3,1,5,2), (4,5,2,1) \circ (4,5,6) \circ (2,1,3)\}$.

Podgrupy generované množinou

Theorem

$$\langle M\rangle = \left\{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n | \forall i : \left(a_i \in M \vee a_i^{-1} \in M\right)\right\}$$

Example

Určete podgrupu Σ_8 generovanou množinou $M = \{(1,8,2,3,5)\circ(1,2,6,7,8),(4,7,6,2)\circ(2,4,8)\}$, respektive $N = \{(4,5,2,1)\circ(4,6,3,1,5,2),(4,5,2,1)\circ(4,5,6)\circ(2,1,3)\}$.

Podgrupy generované množinou

Example

Určete podgrupu $(GL_2(\mathbb{Z}_2), \cdot)$ (grupy regulárních matic 2x2 nad $\mathbb{Z}_2$) generovanou množinou $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, respektive $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Example

Určete podgrupu $(\mathbb{C}, \cdot)$ generovanou prvkem $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$.

Podgrupy generované množinou

Example

Určete podgrupu $(GL_2(\mathbb{Z}_2), \cdot)$ (grupy regulárních matic 2x2 nad $\mathbb{Z}_2$) generovanou množinou $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, respektive $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Example

Určete podgrupu $(\mathbb{C}, \cdot)$ generovanou prvkem $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$.

Homomorfismy

Example

Dokažte, že $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ je izomorfní s $(\mathbb{Z}_6, +)$ a $(\mathbb{Z}_8^\times, \cdot)$ s $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$.

Example

Dokažte, že předpis $f([a]_{20}) = (1, 2, 3, 4, 5)^a$ definuje homomorfismus $f : (\mathbb{Z}_{20}, +) \to (\Sigma_7, \circ)$.

Homomorfismy

Example

Dokažte, že $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ je izomorfní s $(\mathbb{Z}_6, +)$ a $(\mathbb{Z}_8^\times, \cdot)$ s $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$.

Example

Dokažte, že předpis $f([a]_{20}) = (1, 2, 3, 4, 5)^a$ definuje homomorfismus $f : (\mathbb{Z}_{20}, +) \to (\Sigma_7, \circ)$.

Homomorfismy

Lemma

Nechť $f : G \to H$ je homomorfismus grup. Potom platí:
$\forall a \in G : ord_H(f(a)) | ord_G(a)$.

Example

Najděte všechny homomorfismy z grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ do grupy $(\Sigma_3, \circ)$.

Example

Najděte všechny homomorfismy z grupy $(\Sigma_3, \circ)$ do grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$.

Homomorfismy

Lemma

Nechť $f : G \to H$ je homomorfismus grup. Potom platí:
$\forall a \in G : ord_H(f(a)) | ord_G(a)$.

Example

Najděte všechny homomorfismy z grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ do grupy $(\Sigma_3, \circ)$.

Example

Najděte všechny homomorfismy z grupy $(\Sigma_3, \circ)$ do grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$.

Homomorfismy

Lemma

Nechť $f : G \to H$ je homomorfismus grup. Potom platí:
$\forall a \in G : ord_H(f(a)) | ord_G(a)$.

Example

Najděte všechny homomorfismy z grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ do grupy $(\Sigma_3, \circ)$.

Example

Najděte všechny homomorfismy z grupy $(\Sigma_3, \circ)$ do grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$.