MB104 Matematika IV - 3. demonstrované cvičení

Jan Herman

5. března 2008

Obsah

Co už byste měli umět

- grupa - asociativita, neutrální prvek, inverzní prvky
- podgrupa - podmnožina, která je sama grupou
- homomorfismus
  - zobrazení zachovávající operaci
  - $f : (G, \cdot) \to (H, \circ);\ f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$
  - jádro - podgrupa, která se zobrazí na neutrální prvek
- rozklad grupy podle podgrupy
  - $G/H = \{aH | a \in G\}$
  - $aH = bH \Leftrightarrow a \in bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$
- normální podgrupa
  - levý rozklad stejný jako pravý
  - možno faktorizovat
  - korespondence s jádry homomorfismů

Co už byste měli umět

- grupa - asociativita, neutrální prvek, inverzní prvky
- podgrupa - podmnožina, která je sama grupou
- homomorfismus
  - zobrazení zachovávající operaci
  - $f : (G, \cdot) \to (H, \circ); f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$
  - jádro - podgrupa, která se zobrazí na neutrální prvek
- rozklad grupy podle podgrupy
  - $G/H = \{aH | a \in G\}$
  - $aH = bH \Leftrightarrow a \in bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$
- normální podgrupa
  - levý rozklad stejný jako pravý
  - možno faktorizovat
  - korespondence s jádry homomorfismů

Co už byste měli umět

- grupa - asociativita, neutrální prvek, inverzní prvky
- podgrupa - podmnožina, která je sama grupou
- homomorfismus
  - zobrazení zachovávající operaci
  - $f : (G, \cdot) \to (H, \circ); f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$
  - jádro - podgrupa, která se zobrazí na neutrální prvek
- rozklad grupy podle podgrupy
  - $G/H = \{aH | a \in G\}$
  - $aH = bH \Leftrightarrow a \in bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$
- normální podgrupa
  - levý rozklad stejný jako pravý
  - možno faktorizovat
  - korespondence s jádry homomorfismů

Co už byste měli umět

- grupa - asociativita, neutrální prvek, inverzní prvky
- podgrupa - podmnožina, která je sama grupou
- homomorfismus
  - zobrazení zachovávající operaci
  - $f : (G, \cdot) \to (H, \circ); f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$
  - jádro - podgrupa, která se zobrazí na neutrální prvek
- rozklad grupy podle podgrupy
  - $G/H = \{aH | a \in G\}$
  - $aH = bH \Leftrightarrow a \in bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$
- normální podgrupa
  - levý rozklad stejný jako pravý
  - možno faktorizovat
  - korespondence s jádry homomorfismů

Co už byste měli umět

- grupa - asociativita, neutrální prvek, inverzní prvky
- podgrupa - podmnožina, která je sama grupou
- homomorfismus
  - zobrazení zachovávající operaci
  - $f : (G, \cdot) \to (H, \circ); f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$
  - jádro - podgrupa, která se zobrazí na neutrální prvek
- rozklad grupy podle podgrupy
  - $G/H = \{aH | a \in G\}$
  - $aH = bH \Leftrightarrow a \in bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$
- normální podgrupa
  - levý rozklad stejný jako pravý
  - možno faktorizovat
  - korespondence s jádry homomorfismů

Homomorfismy

Příklad 1

Najděte všechny homomorfismy z grupy $(\Sigma_3, \circ)$ do grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ a pro každý určete jeho jádro.

Příklad 2

Najděte všechny homomorfismy z grupy $(\mathbb{Z}, +)$ do sebe sama (neboli všechny automorfismy $(\mathbb{Z}, +)$) a určete jejich jádra a obrazy.

Příklad 3

Najděte všechny homomorfismy z grupy $(\mathbb{Z}, +)$ do grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +)$ a popište jejich jádra a obrazy.

Homomorfismy

Příklad 1

Najděte všechny homomorfismy z grupy $(\Sigma_3, \circ)$ do grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ a pro každý určete jeho jádro.

Příklad 2

Najděte všechny homomorfismy z grupy $(\mathbb{Z}, +)$ do sebe sama (neboli všechny automorfismy $(\mathbb{Z}, +)$) a určete jejich jádra a obrazy.

Příklad 3

Najděte všechny homomorfismy z grupy $(\mathbb{Z}, +)$ do grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +)$ a popište jejich jádra a obrazy.

Homomorfismy

Příklad 1

Najděte všechny homomorfismy z grupy $(\Sigma_3, \circ)$ do grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ a pro každý určete jeho jádro.

Příklad 2

Najděte všechny homomorfismy z grupy $(\mathbb{Z}, +)$ do sebe sama (neboli všechny automorfismy $(\mathbb{Z}, +)$) a určete jejich jádra a obrazy.

Příklad 3

Najděte všechny homomorfismy z grupy $(\mathbb{Z}, +)$ do grupy $(\mathbb{Z}_{10}, +)$ a popište jejich jádra a obrazy.

Rozklady podle podgrup

Příklad 4

Popište levý rozklad grupy $(\Sigma_3, \circ)$ podle její podgrupy $\langle(1,2)\rangle$.

Příklad 5

Popište levý rozklad grupy $(\mathbb{C}, +)$ podle podgrupy $(\mathbb{R}, +)$.

Rozklady podle podgrup

Příklad 4

Popište levý rozklad grupy $(\Sigma_3, \circ)$ podle její podgrupy $\langle(1,2)\rangle$.

Příklad 5

Popište levý rozklad grupy $(\mathbb{C}, +)$ podle podgrupy $(\mathbb{R}, +)$.

Lagrangeova věta a její důsledky

Věta (Lagrange)

Nechť G je grupa a H její podgrupa. Potom $|G| = |G/H| \cdot |H|$.

Důsledek

Nechť G je n-prvková konečná grupa, H její podgrupa.

- $|H|$ *dělí* n
- *pro* $a \in G$ *platí* $\mathrm{ord}_G a | n$
- $\forall a \in G : a^n = 1_G$
- *pro p prvočíslo,* $p \nmid a \in \mathbb{Z}$ *platí* $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$
- *pro* $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}, (a, m) = 1$ *platí* $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$

Lagrangeova věta a její důsledky

Věta (Lagrange)

Nechť G je grupa a H její podgrupa. Potom $|G| = |G/H| \cdot |H|$.

Důsledek

Nechť G je n-prvková konečná grupa, H její podgrupa.

- $|H|$ *dělí* n
- *pro* $a \in G$ *platí* $\mathrm{ord}_G a | n$
- $\forall a \in G : a^n = 1_G$
- *pro p prvočíslo,* $p \nmid a \in \mathbb{Z}$ *platí* $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$
- *pro* $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$ *platí* $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$

Lagrangeova věta a její důsledky

Věta (Lagrange)

Nechť G je grupa a H její podgrupa. Potom $|G| = |G/H| \cdot |H|$.

Důsledek

Nechť G je n-prvková konečná grupa, H její podgrupa.

- $|H|$ *dělí* n
- *pro* $a \in G$ *platí* $\mathrm{ord}_G a \mid n$
- $\forall a \in G : a^n = 1_G$
- *pro p prvočíslo,* $p \nmid a \in \mathbb{Z}$ *platí* $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$
- *pro* $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$ *platí* $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

Lagrangeova věta a její důsledky

Věta (Lagrange)

Nechť G je grupa a H její podgrupa. Potom $|G| = |G/H| \cdot |H|$.

Důsledek

Nechť G je n-prvková konečná grupa, H její podgrupa.

- $|H|$ *dělí* n
- *pro* $a \in G$ *platí* $\mathrm{ord}_G a | n$
- $\forall a \in G : a^n = 1_G$
- *pro* p *prvočíslo,* $p \nmid a \in \mathbb{Z}$ *platí* $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$
- *pro* $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$ *platí* $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$

Lagrangeova věta a její důsledky

Věta (Lagrange)

Nechť G je grupa a H její podgrupa. Potom $|G| = |G/H| \cdot |H|$.

Důsledek

Nechť G je n-prvková konečná grupa, H její podgrupa.

- $|H|$ *dělí* n
- *pro* $a \in G$ *platí* $\mathrm{ord}_G a | n$
- $\forall a \in G : a^n = 1_G$
- *pro* p *prvočíslo,* $p \nmid a \in \mathbb{Z}$ *platí* $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$
- *pro* $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, m) = 1$ *platí* $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$

Lagrangeova věta a její důsledky

Věta (Lagrange)

Nechť G je grupa a H její podgrupa. Potom $|G| = |G/H| \cdot |H|$.

Důsledek

Nechť G je n-prvková konečná grupa, H její podgrupa.

- $|H|$ *dělí* n
- *pro* $a \in G$ *platí* $\mathrm{ord}_G a | n$
- $\forall a \in G : a^n = 1_G$
- *pro* p *prvočíslo,* $p \nmid a \in \mathbb{Z}$ *platí* $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$
- *pro* $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}, (a, m) = 1$ *platí* $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$

Využití Lagrangeovy věty

Příklad 6

Kolik tříd obsahuje levý rozklad grupy $(\Sigma_7, \circ)$ podle podgrupy $\langle (1,2) \circ (3,4,5,6,7) \rangle$?

Příklad 7

Spočtěte $9^{2008} \equiv ? \pmod{17}$.

Využití Lagrangeovy věty

Příklad 6

Kolik tříd obsahuje levý rozklad grupy $(\Sigma_7, \circ)$ podle podgrupy $\langle(1,2)\circ(3,4,5,6,7)\rangle$?

Příklad 7

Spočtěte $9^{2008} \equiv ?\pmod{17}$.

Normální podgrupy

Definice

Podgrupu H grupy G nazýváme normální, platí-li
$\forall a \in G : \forall h \in H : a \cdot h \cdot a^{-1} \in H$.
Značíme $H \trianglelefteq G$.

Poznámka (Ekvivalentní definice normální podgrupy)

Podgrupu H grupy G nazýváme normální, splývá-li levý rozklad G podle H s pravým. Jinými slovy: $\forall a \in G : aH = Ha$.

Normální podgrupy

Definice

Podgrupu H grupy G nazýváme normální, platí-li
$\forall a \in G : \forall h \in H : a \cdot h \cdot a^{-1} \in H$.
Značíme $H \trianglelefteq G$.

Poznámka (Ekvivalentní definice normální podgrupy)

Podgrupu H grupy G nazýváme normální, splývá-li levý rozklad G podle H s pravým. Jinými slovy: $\forall a \in G : aH = Ha$.

Normální podgrupy

Příklad 8

Najděte všechny normální podgrupy grupy $(\Sigma_3, \circ)$.

Příklad 9

Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $\mathbb{A}_n$ normální podgrupa $(\Sigma_n, \circ)$ ($\mathbb{A}_n$ značí množinu (grupu) všech sudých permutací n-prvkové množiny).

Normální podgrupy

Příklad 8

Najděte všechny normální podgrupy grupy $(\Sigma_3, \circ)$.

Příklad 9

Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $\mathbb{A}_n$ normální podgrupa $(\Sigma_n, \circ)$ ($\mathbb{A}_n$ značí množinu (grupu) všech sudých permutací n-prvkové množiny).

Normální podgrupy

Příklad 10

Dokažte, že každá podgrupa komutativní grupy je normální.

Poznámka

Opačně to neplatí! Tedy komutativní podgrupa nekomutativní grupy může a nemusí být její normální podgrupou.

Normální podgrupy

Příklad 10

Dokažte, že každá podgrupa komutativní grupy je normální.

Poznámka

Opačně to neplatí! Tedy komutativní podgrupa nekomutativní grupy může a nemusí být její normální podgrupou.

Normální podgrupy jako jádra homomorfismů

Věta

Jádro homomorfismu $f : G \to H$ je normální podgrupou grupy G.

Poznámka

Uvidíme, že platí i opačná korespondence - každá normální podgrupa G je jádrem nějakého homomorfismu z G.

Příklad 11

Nechť $G = GL_n(\mathbb{R})$ a H je její podgrupa sestávající se z matic s determinantem rovným 1. Ukažte, že $H \trianglelefteq G$.

Normální podgrupy jako jádra homomorfismů

Věta

Jádro homomorfismu $f : G \to H$ je normální podgrupou grupy G.

Poznámka

Uvidíme, že platí i opačná korespondence - každá normální podgrupa G je jádrem nějakého homomorfismu z G.

Příklad 11

Nechť $G = GL_n(\mathbb{R})$ a H je její podgrupa sestávající se z matic s determinantem rovným 1. Ukažte, že $H \trianglelefteq G$.

Normální podgrupy jako jádra homomorfismů

Věta

Jádro homomorfismu $f : G \to H$ je normální podgrupou grupy G.

Poznámka

Uvidíme, že platí i opačná korespondence - každá normální podgrupa G je jádrem nějakého homomorfismu z G.

Příklad 11

Nechť $G = GL_n(\mathbb{R})$ a H je její podgrupa sestávající se z matic s determinantem rovným 1. Ukažte, že $H \trianglelefteq G$.

Faktorové grupy

Definice

Je-li H normální podgrupa $(G, \cdot)$, můžeme na množině (levých) rozkladových tříd G/H definovat operaci $\cdot$ takto:
$aH \cdot bH = (a \cdot b)H$.
Pak je $(G/H, \cdot)$ grupa. Nazáváme ji faktorovou grupou (zkráceně faktorgrupou) grupy G podle normální podgrupy H.

Příklad 12

Popište faktorgrupu $(\mathbb{Z}, +)$ podle podgrupy $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 13

Popište faktorgrupu grupy $(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$ podle podgrupy $H = \{(m, n) : 6|2m - n\}$

Faktorové grupy

Definice

Je-li H normální podgrupa $(G, \cdot)$, můžeme na množině (levých) rozkladových tříd G/H definovat operaci $\cdot$ takto:
$aH \cdot bH = (a \cdot b)H$.
Pak je $(G/H, \cdot)$ grupa. Nazáváme ji faktorovou grupou (zkráceně faktorgrupou) grupy G podle normální podgrupy H.

Příklad 12

Popište faktorgrupu $(\mathbb{Z}, +)$ podle podgrupy $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 13

Popište faktorgrupu grupy $(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$ podle podgrupy $H = \{(m, n) : 6 | 2m - n\}$

Faktorové grupy

Definice

Je-li H normální podgrupa $(G, \cdot)$, můžeme na množině (levých) rozkladových tříd G/H definovat operaci $\cdot$ takto:
$aH \cdot bH = (a \cdot b)H$.
Pak je $(G/H, \cdot)$ grupa. Nazáváme ji faktorovou grupou (zkráceně faktorgrupou) grupy G podle normální podgrupy H.

Příklad 12

Popište faktorgrupu $(\mathbb{Z}, +)$ podle podgrupy $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 13

Popište faktorgrupu grupy $(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$ podle podgrupy $H = \{(m, n) : 6|2m - n\}$

Faktorové grupy

Příklad 14

Ukažte, že normální podgrupa H grupy G je jádrem nějakého homomorfismu z G.

Poznámka

Ukázali jsme tedy, že normální podgrupy jsou v oboustranné korespondenci s jádry homomorfismů.

Příklad 15

Dokažte, že $\mathbb{V}_4 = \{id, (1,2) \circ (3,4), (1,3) \circ (2,4), (1,4) \circ (2,3)\}$ je normální podgrupa grupy $(\mathbb{A}_4, \circ)$ (grupy sudých permutací na množině $\{1,2,3,4\}$). Určete, jaké známé grupě je izomorfní faktorgrupa $\mathbb{A}_4/\mathbb{V}_4$. Sestrojte endomorfismus f grupy $\mathbb{A}_4$ (tedy homomorfismus $f : \mathbb{A}_4 \to \mathbb{A}_4$), jehož jádrem je $\mathbb{V}_4$.

Faktorové grupy

Příklad 14

Ukažte, že normální podgrupa H grupy G je jádrem nějakého homomorfismu z G.

Poznámka

Ukázali jsme tedy, že normální podgrupy jsou v oboustranné korespondenci s jádry homomorfismů.

Příklad 15

Dokažte, že $\mathbb{V}_4 = \{id, (1,2) \circ (3,4), (1,3) \circ (2,4), (1,4) \circ (2,3)\}$ je normální podgrupa grupy $(\mathbb{A}_4, \circ)$ (grupy sudých permutací na množině $\{1,2,3,4\}$). Určete, jaké známé grupě je izomorfní faktorgrupa $\mathbb{A}_4/\mathbb{V}_4$. Sestrojte endomorfismus f grupy $\mathbb{A}_4$ (tedy homomorfismus $f : \mathbb{A}_4 \to \mathbb{A}_4$), jehož jádrem je $\mathbb{V}_4$.

Faktorové grupy

Příklad 14

Ukažte, že normální podgrupa H grupy G je jádrem nějakého homomorfismu z G.

Poznámka

Ukázali jsme tedy, že normální podgrupy jsou v oboustranné korespondenci s jádry homomorfismů.

Příklad 15

Dokažte, že $\mathbb{V}_4 = \{id, (1,2)\circ(3,4), (1,3)\circ(2,4), (1,4)\circ(2,3)\}$ je normální podgrupa grupy $(\mathbb{A}_4, \circ)$ (grupy sudých permutací na množině $\{1,2,3,4\}$). Určete, jaké známé grupě je izomorfní faktorgrupa $\mathbb{A}_4/\mathbb{V}_4$. Sestrojte endomorfismus f grupy $\mathbb{A}_4$ (tedy homomorfismus $f : \mathbb{A}_4 \to \mathbb{A}_4$), jehož jádrem je $\mathbb{V}_4$.