

# MB104 Matematika IV - 4. demonstrované cvičení

Jan Herman

12. března 2008

# Obsah

- 1 Krátké opakování
- 2 Zbylo z minula
- 3 Polynomy
  - Racionální kořeny
  - Násobné kořeny

# Co už byste měli umět

- **grupy** - podgrupy, homomorfismy, normální podgrupy, faktorgrupy
- **okruhy**
  - množina  $R$  se dvěma binárními operacemi  $+$  a  $\cdot$
  - neutrální prvky  $0$  (vůči  $+$ ) a  $1$  (vůči  $\cdot$ )
  - $(R, +)$  je komutativní grupa
  - $(R, \cdot)$  je komutativní monoid (tj. asociativní, neutrální prvek)
  - distributivita
  - **obor integrity, těleso**
- **polynomy**
  - konečné součty mocnin neznámé
  - **kořen** -  $f(a)=0$
  - **stupeň** polynomu - exponent nejvyšší mocniny neznámé

# Co už byste měli umět

- **grupy** - podgrupy, homomorfismy, normální podgrupy, faktorgrupy
- **okruhy**
  - množina  $R$  se dvěma binárními operacemi  $+$  a  $\cdot$
  - neutrální prvky  $0$  (vůči  $+$ ) a  $1$  (vůči  $\cdot$ )
  - $(R, +)$  je komutativní grupa
  - $(R, \cdot)$  je komutativní monoid (tj. asociativní, neutrální prvek)
  - distributivita
  - **obor integrity, těleso**
- **polynomy**
  - konečné součty mocnin neznámé
  - **kořen** -  $f(a)=0$
  - **stupeň** polynomu - exponent nejvyšší mocniny neznámé

# Co už byste měli umět

- **grupy** - podgrupy, homomorfismy, normální podgrupy, faktorgrupy
- **okruhy**
  - množina  $R$  se dvěma binárními operacemi  $+$  a  $\cdot$
  - neutrální prvky  $0$  (vůči  $+$ ) a  $1$  (vůči  $\cdot$ )
  - $(R, +)$  je komutativní grupa
  - $(R, \cdot)$  je komutativní monoid (tj. asociativní, neutrální prvek)
  - distributivita
  - **obor integrity, těleso**
- **polynomy**
  - konečné součty mocnin neznámé
  - **kořen** -  $f(a)=0$
  - **stupeň** polynomu - exponent nejvyšší mocniny neznámé

# Zbylo z minula

## Příklad 1

Dokažte, že  $\mathbb{V}_4 = \{id, (1, 2) \circ (3, 4), (1, 3) \circ (2, 4), (1, 4) \circ (2, 3)\}$  je normální podgrupa grupy  $(\mathbb{A}_4, \circ)$  (grupy sudých permutací na množině  $\{1, 2, 3, 4\}$ ). Určete, jaké známé grupě je izomorfní faktorgrupa  $\mathbb{A}_4/\mathbb{V}_4$ . Sestrojte endomorfismus  $f$  grupy  $\mathbb{A}_4$  (tedy homomorfismus  $f : \mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{A}_4$ ), jehož jádrem je  $\mathbb{V}_4$ .

# Racionální kořeny polynomů

## Věta

*Má-li polynom  $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  s celočíselnými koeficienty racionální kořen  $\frac{p}{q}$  v nezkracitelném tvaru, potom  $p|a_0$ ,  $q|a_n$ .*

## Příklad 2

Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu  
 $f = 12x^6 + 8x^5 - 85x^4 + 15x^3 + 55x^2 + x - 6 \in \mathbb{Z}[x]$ .

## Příklad 3

Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu  
 $h = 6x^6 - 25x^5 + 16x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 35x - 6$ .

# Racionální kořeny polynomů

## Věta

*Má-li polynom  $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  s celočíselnými koeficienty racionální kořen  $\frac{p}{q}$  v nezkracitelném tvaru, potom  $p|a_0$ ,  $q|a_n$ .*

## Příklad 2

Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu

$$f = 12x^6 + 8x^5 - 85x^4 + 15x^3 + 55x^2 + x - 6 \in \mathbb{Z}[x].$$

## Příklad 3

Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu

$$h = 6x^6 - 25x^5 + 16x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 35x - 6.$$



# Racionální kořeny polynomů

## Věta

*Má-li polynom  $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  s celočíselnými koeficienty racionální kořen  $\frac{p}{q}$  v nezkracitelném tvaru, potom  $p|a_0$ ,  $q|a_n$ .*

## Příklad 2

Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu

$$f = 12x^6 + 8x^5 - 85x^4 + 15x^3 + 55x^2 + x - 6 \in \mathbb{Z}[x].$$

## Příklad 3

Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu

$$h = 6x^6 - 25x^5 + 16x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 35x - 6.$$

# Násobné kořeny

## Příklad 4

Zjistěte násobnost kořene  $-1$  polynomu

$x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{C}[x]$  v závislosti na parametru  $a \in \mathbb{C}$ .

## Věta

*Pokud má polynom  $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  násobný kořen  $a$  (neboli  $(x - a)^2 | f$ ), pak je  $a$  kořenem  $f$  i  $f'$ . Je-li  $f$  polynom nad oborem integrity, pak platí i opačná implikace.*

## Příklad 5

Najděte všechny alespoň dvojnásobné kořeny polynomu

$x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 12x^2 - 4$ .

# Násobné kořeny

## Příklad 4

Zjistěte násobnost kořene  $-1$  polynomu

$x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{C}[x]$  v závislosti na parametru  $a \in \mathbb{C}$ .

## Věta

*Pokud má polynom  $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  násobný kořen  $a$  (neboli  $(x - a)^2 | f$ ), pak je  $a$  kořenem  $f$  i  $f'$ . Je-li  $f$  polynom nad oborem integrity, pak platí i opačná implikace.*

## Příklad 5

Najděte všechny alespoň dvojnásobné kořeny polynomu

$x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 12x^2 - 4$ .

# Násobné kořeny

## Příklad 4

Zjistěte násobnost kořene  $-1$  polynomu

$x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{C}[x]$  v závislosti na parametru  $a \in \mathbb{C}$ .

## Věta

*Pokud má polynom  $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  násobný kořen  $a$  (neboli  $(x - a)^2 | f$ ), pak je  $a$  kořenem  $f$  i  $f'$ . Je-li  $f$  polynom nad oborem integrity, pak platí i opačná implikace.*

## Příklad 5

Najděte všechny alespoň dvojnásobné kořeny polynomu

$x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 12x^2 - 4$ .

# Násobné kořeny

## Příklad 6

Nalezněte nejprve racionální a poté násobné kořeny polynomu  $g = 4x^7 + 17x^6 + 32x^5 + 39x^4 + 28x^3 + 13x^2 + 2x \in \mathbb{Z}[x]$ .