MB104 Matematika IV - 4. demonstrované cvičení

Jan Herman

12. března 2008

Obsah

Co už byste měli umět

- grupy - podgrupy, homomorfismy, normální podgrupy, faktorgrupy
- okruhy
  - množina R se dvěma binárními operacemi $+$ a $\cdot$
  - neutrální prvky 0 (vůči $+$) a 1 (vůči $\cdot$)
  - $(R, +)$ je komutativní grupa
  - $(R, \cdot)$ je komutativní monoid (tj. asociativní, neutrální prvek)
  - distributivita
  - obor integrity, těleso
- polynomy
  - konečné součty mocnin neznámé
  - kořen - f(a)=0
  - stupeň polynomu - exponent nejvyšší mocniny neznámé

Co už byste měli umět

- grupy - podgrupy, homomorfismy, normální podgrupy, faktorgrupy
- okruhy
  - množina R se dvěma binárními operacemi $+$ a $\cdot$
  - neutrální prvky 0 (vůči $+$) a 1 (vůči $\cdot$)
  - $(R, +)$ je komutativní grupa
  - $(R, \cdot)$ je komutativní monoid (tj. asociativní, neutrální prvek)
  - distributivita
  - obor integrity, těleso
- polynomy
  - konečné součty mocnin neznámé
  - kořen - f(a)=0
  - stupeň polynomu - exponent nejvyšší mocniny neznámé

Co už byste měli umět

- grupy - podgrupy, homomorfismy, normální podgrupy, faktorgrupy
- okruhy
  - množina R se dvěma binárními operacemi $+$ a $\cdot$
  - neutrální prvky 0 (vůči $+$) a 1 (vůči $\cdot$)
  - $(R, +)$ je komutativní grupa
  - $(R, \cdot)$ je komutativní monoid (tj. asociativní, neutrální prvek)
  - distributivita
  - obor integrity, těleso
- polynomy
  - konečné součty mocnin neznámé
  - kořen - f(a)=0
  - stupeň polynomu - exponent nejvyšší mocniny neznámé

Zbylo z minula

Příklad 1

Dokažte, že $\mathbb{V}_4 = \{id, (1,2) \circ (3,4), (1,3) \circ (2,4), (1,4) \circ (2,3)\}$ je normální podgrupa grupy $(\mathbb{A}_4, \circ)$ (grupy sudých permutací na množině $\{1,2,3,4\}$). Určete, jaké známé grupě je izomorfní faktorgrupa $\mathbb{A}_4/\mathbb{V}_4$. Sestrojte endomorfismus f grupy $\mathbb{A}_4$ (tedy homomorfismus $f : \mathbb{A}_4 \to \mathbb{A}_4$), jehož jádrem je $\mathbb{V}_4$.

Racionální kořeny polynomů

Věta

Má-li polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ s celočíselnými koeficienty racionální kořen $\frac{p}{q}$ v nezkratitelném tvaru, potom $p | a_0$, $q | a_n$.

Příklad 2

Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu $f = 12x^6 + 8x^5 - 85x^4 + 15x^3 + 55x^2 + x - 6 \in \mathbb{Z}[x]$.

Příklad 3

Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu $h = 6x^6 - 25x^5 + 16x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 35x - 6$.

Racionální kořeny polynomů

Věta

Má-li polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ s celočíselnými koeficienty racionální kořen $\frac{p}{q}$ v nezkratitelném tvaru, potom $p | a_0$, $q | a_n$.

Příklad 2

Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu $f = 12x^6 + 8x^5 - 85x^4 + 15x^3 + 55x^2 + x - 6 \in \mathbb{Z}[x]$.

Příklad 3

Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu $h = 6x^6 - 25x^5 + 16x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 35x - 6$.

Racionální kořeny polynomů

Věta

Má-li polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ s celočíselnými koeficienty racionální kořen $\frac{p}{q}$ v nezkratitelném tvaru, potom $p | a_0$, $q | a_n$.

Příklad 2

Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu $f = 12x^6 + 8x^5 - 85x^4 + 15x^3 + 55x^2 + x - 6 \in \mathbb{Z}[x]$.

Příklad 3

Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu $h = 6x^6 - 25x^5 + 16x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 35x - 6$.

Násobné kořeny

Příklad 4

Zjistěte násobnost kořene -1 polynomu $x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{C}[x]$ v závislosti na parametru $a \in \mathbb{C}$.

Věta

Pokud má polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ násobný kořen a (neboli $(x - a)^2 | f$), pak je a kořenem f i f'. Je-li f polynom nad oborem integrity, pak platí i opačná implikace.

Příklad 5

Najděte všechny alespoň dvojnásobné kořeny polynomu $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 12x^2 - 4$.

Násobné kořeny

Příklad 4

Zjistěte násobnost kořene -1 polynomu $x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{C}[x]$ v závislosti na parametru $a \in \mathbb{C}$.

Věta

Pokud má polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ násobný kořen a (neboli $(x-a)^2 | f$), pak je a kořenem f i f'. Je-li f polynom nad oborem integrity, pak platí i opačná implikace.

Příklad 5

Najděte všechny alespoň dvojnásobné kořeny polynomu $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 12x^2 - 4$.

Násobné kořeny

Příklad 4

Zjistěte násobnost kořene -1 polynomu $x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{C}[x]$ v závislosti na parametru $a \in \mathbb{C}$.

Věta

Pokud má polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ násobný kořen a (neboli $(x-a)^2 | f$), pak je a kořenem f i f'. Je-li f polynom nad oborem integrity, pak platí i opačná implikace.

Příklad 5

Najděte všechny alespoň dvojnásobné kořeny polynomu $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 12x^2 - 4$.

Násobné kořeny

Příklad 6

Nalezněte nejprve racionální a poté násobné kořeny polynomu $g = 4x^7 + 17x^6 + 32x^5 + 39x^4 + 28x^3 + 13x^2 + 2x \in \mathbb{Z}[x]$.