MB104 Matematika IV - 5. demonstrované cvičení

Jan Herman

19. března 2008

Obsah

Co už byste měli umět

- okruhy
  - množina R se dvěma binárními operacemi $+$ a $\cdot$
  - $(R, +)$ je komutativní grupa
  - $(R, \cdot)$ je komutativní monoid (tj. asociativní, neutrální prvek)
  - neutrální prvky 0 (vůči $+$) a 1 (vůči $\cdot$)
  - distributivita
  - jednotka - invertibilní prvek; grupa jednotek $(R^\times, \cdot)$
  - obor integrity, těleso
- polynomy
  - kořen - f(a)=0; pak $x - a | f$
  - stupeň polynomu - exponent nejvyšší mocniny neznámé
  - ireducibilní polynom - nelze rozložit na součin polynomů nižších stupňů

Co už byste měli umět

- okruhy
  - množina R se dvěma binárními operacemi $+$ a $\cdot$
  - $(R, +)$ je komutativní grupa
  - $(R, \cdot)$ je komutativní monoid (tj. asociativní, neutrální prvek)
  - neutrální prvky 0 (vůči $+$) a 1 (vůči $\cdot$)
  - distributivita
  - jednotka - invertibilní prvek; grupa jednotek $(R^{\times}, \cdot)$
  - obor integrity, těleso
- polynomy
  - kořen - f(a)=0; pak $x - a | f$
  - stupeň polynomu - exponent nejvyšší mocniny neznámé
  - ireducibilní polynom - nelze rozložit na součin polynomů nižších stupňů

Racionální kořeny polynomů

Příklad 1

Nalezněte nejprve racionální a poté násobné kořeny polynomu $g = 4x^7 + 17x^6 + 32x^5 + 39x^4 + 28x^3 + 13x^2 + 2x \in \mathbb{Z}[x]$. Rozložte f na součin ireducibilních polynomů postupně z $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ a $\mathbb{Q}[x]$.

Příklad 2

Polynom $f = x^8 + x^4 + x^3 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$ rozložte na součin ireducibilních polynomů ze $\mathbb{Z}_2[x]$.

Racionální kořeny polynomů

Příklad 1

Nalezněte nejprve racionální a poté násobné kořeny polynomu $g = 4x^7 + 17x^6 + 32x^5 + 39x^4 + 28x^3 + 13x^2 + 2x \in \mathbb{Z}[x]$. Rozložte f na součin ireducibilních polynomů postupně z $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ a $\mathbb{Q}[x]$.

Příklad 2

Polynom $f = x^8 + x^4 + x^3 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$ rozložte na součin ireducibilních polynomů ze $\mathbb{Z}_2[x]$.

Okruhy

Příklad 3

Ukažte, že v každém (i nekomutativním) okruhu $(R, +, \cdot)$ platí $\forall a, b \in R$:

- $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
- $(-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -a$
- $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$

Příklad 4

Rozhodněte, zda platí: Pokud je $(R, +, \cdot)$ okruh, pak je okruh i $(R, +, \circ)$, kde $a \circ b = a \cdot b + b \cdot a$.

Okruhy

Příklad 3

Ukažte, že v každém (i nekomutativním) okruhu $(R, +, \cdot)$ platí $\forall a, b \in R$:

- $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
- $(-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -a$
- $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$

Příklad 4

Rozhodněte, zda platí: Pokud je $(R, +, \cdot)$ okruh, pak je okruh i $(R, +, \circ)$, kde $a \circ b = a \cdot b + b \cdot a$.

Okruhy a podokruhy

Příklad 5

Ukažte, že každý okruh obsahuje buď podokruh izomorfní s okruhem $\mathbb{Z}$, nebo s okruhem $\mathbb{Z}_n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 6

Rozhodněte, zda množiny

$$A = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, 3 \nmid p \right\} \quad \text{a} \quad B = \left\{ \frac{r}{3^n} : r \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

tvoří podokruhy okruhu $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Pokud ano, určete jejich jednotky.

Okruhy a podokruhy

Příklad 5

Ukažte, že každý okruh obsahuje buď podokruh izomorfní s okruhem $\mathbb{Z}$, nebo s okruhem $\mathbb{Z}_n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 6

Rozhodněte, zda množiny

$$A = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, 3 \nmid p \right\} \quad \text{a} \quad B = \left\{ \frac{r}{3^n} : r \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

tvoří podokruhy okruhu $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Pokud ano, určete jejich jednotky.

Jednotky okruhů

Příklad 7

Určete všechny jednotky okruhů $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_5[x]$.

Příklad 8

Ukažte, že okruhy $\mathbb{Z}_4[x]$ a $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ obsahují nekonečně mnoho jednotek.

Jednotky okruhů

Příklad 7

Určete všechny jednotky okruhů $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_5[x]$.

Příklad 8

Ukažte, že okruhy $\mathbb{Z}_4[x]$ a $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ obsahují nekonečně mnoho jednotek.

Bonusové příklady

Příklad 9

Najděte všechny jednotky okruhů z předchozího příkladu.

Příklad 10

Dokažte, že je-li $(K, +, \cdot)$ těleso, pak ireducibilní polynomy nad K jsou právě ireducibilní prvky okruhu $K[x]$.

Bonusové příklady

Příklad 9

Najděte všechny jednotky okruhů z předchozího příkladu.

Příklad 10

Dokažte, že je-li $(K, +, \cdot)$ těleso, pak ireducibilní polynomy nad K jsou právě ireducibilní prvky okruhu $K[x]$.