MB104 Matematika IV - 6. demonstrované cvičení

Jan Herman

26. března 2008

Obsah

Co už byste měli umět

- okruhy
  - množina R se dvěma binárními operacemi $+$ a $\cdot$
  - $(R, +)$ je komutativní grupa
  - $(R, \cdot)$ je komutativní monoid (tj. asociativní, neutrální prvek)
  - neutrální prvky 0 (vůči $+$) a 1 (vůči $\cdot$)
  - distributivita
  - jednotka - invertibilní prvek; grupa jednotek $(R^\times, \cdot)$
  - obor integrity, těleso
- polynomy
  - kořen - f(a)=0; pak $x - a | f$
  - stupeň polynomu - exponent nejvyšší mocniny neznámé
  - ireducibilní polynom - nelze rozložit na součin polynomů nižších stupňů

Co už byste měli umět

- okruhy
  - množina R se dvěma binárními operacemi $+$ a $\cdot$
  - $(R, +)$ je komutativní grupa
  - $(R, \cdot)$ je komutativní monoid (tj. asociativní, neutrální prvek)
  - neutrální prvky 0 (vůči $+$) a 1 (vůči $\cdot$)
  - distributivita
  - jednotka - invertibilní prvek; grupa jednotek $(R^\times, \cdot)$
  - obor integrity, těleso
- polynomy
  - kořen - f(a)=0; pak $x - a | f$
  - stupeň polynomu - exponent nejvyšší mocniny neznámé
  - ireducibilní polynom - nelze rozložit na součin polynomů nižších stupňů

Zbylo z minula

Příklad 1

Najděte všechnny jednotky okruhu
$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{ a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

Eisensteinovo kritérium

Věta (Eisensteinovo kritérium)

Nechť $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, p je prvočíslo takové, že $p | a_i$, pro $0 \leq i \leq n-1$, $p \nmid a_n$ a $p^2 \nmid a_0$. Potom je polynom f ireducibilní nad $\mathbb{Z}$ (a tedy i nad $\mathbb{Q}$).

Poznámka

Pokud polynom f a prvočíslo p splňují podmínky předchozí věty, říkáme, že f je Eisensteinův polynom vůči prvočíslu p.

Příklad 2

Dokažte, že polynom $f = x^3 + 3x^2 + 5x + 5$ je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.

Eisensteinovo kritérium

Věta (Eisensteinovo kritérium)

Nechť $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, p je prvočíslo takové, že $p | a_i$, pro $0 \leq i \leq n-1$, $p \nmid a_n$ a $p^2 \nmid a_0$. Potom je polynom f ireducibilní nad $\mathbb{Z}$ (a tedy i nad $\mathbb{Q}$).

Poznámka

Pokud polynom f a prvočíslo p splňují podmínky předchozí věty, říkáme, že f je Eisensteinův polynom vůči prvočíslu p.

Příklad 2

Dokažte, že polynom $f = x^3 + 3x^2 + 5x + 5$ je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.

Eisensteinovo kritérium

Věta (Eisensteinovo kritérium)

Nechť $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, p je prvočíslo takové, že $p | a_i$, pro $0 \le i \le n-1$, $p \nmid a_n$ a $p^2 \nmid a_0$. Potom je polynom f ireducibilní nad $\mathbb{Z}$ (a tedy i nad $\mathbb{Q}$).

Poznámka

Pokud polynom f a prvočíslo p splňují podmínky předchozí věty, říkáme, že f je Eisensteinův polynom vůči prvočíslu p.

Příklad 2

Dokažte, že polynom $f = x^3 + 3x^2 + 5x + 5$ je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.

Použití Eisensteinova kritéria, metoda neurčitých koeficientů

Příklad 3

Ukažte, že polynom $f = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}$.

Příklad 4

Dokažte, že polynom $g_p = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = \frac{x^p - 1}{x - 1}$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}$, právě když p je prvočíslo.

Příklad 5

Nalezněte rozklad polynomu $f = x^4 + 4x^3 + x^2 + 5$ na součin ireducibilních polynomů ze $\mathbb{Z}[x]$.

Použití Eisensteinova kritéria, metoda neurčitých koeficientů

Příklad 3

Ukažte, že polynom $f = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}$.

Příklad 4

Dokažte, že polynom $g_p = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = \frac{x^p-1}{x-1}$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}$, právě když p je prvočíslo.

Příklad 5

Nalezněte rozklad polynomu $f = x^4 + 4x^3 + x^2 + 5$ na součin ireducibilních polynomů ze $\mathbb{Z}[x]$.

Použití Eisensteinova kritéria, metoda neurčitých koeficientů

Příklad 3

Ukažte, že polynom $f = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}$.

Příklad 4

Dokažte, že polynom $g_p = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = \frac{x^p-1}{x-1}$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}$, právě když p je prvočíslo.

Příklad 5

Nalezněte rozklad polynomu $f = x^4 + 4x^3 + x^2 + 5$ na součin ireducibilních polynomů ze $\mathbb{Z}[x]$.

Ireducibilní polynomy v $\mathbb{Z}_p[x]$

Příklad 6

Nalezněte všechny ireducibilní polynomy stupně nejvýše 3 nad okruhem $\mathbb{Z}_3$.

Poznámka

Z poznatků o konečných tělesech vyplývá, že v $\mathbb{Z}_p[x]$, kde p je prvočíslo, existují ireducibilní polynomy libovolného stupně.

Příklad 7

Rozložte polynom $f = x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x + 2$ na součin ireducibilních polynomů ze $\mathbb{Z}_3[x]$.

Příklad 8

Rozložte polynom $f = x^5 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 2x \in \mathbb{Z}_5[x]$ na součin ireducibilních polynomů ze $\mathbb{Z}_5[x]$.

Ireducibilní polynomy v $\mathbb{Z}_p[x]$

Příklad 6

Nalezněte všechny ireducibilní polynomy stupně nejvýše 3 nad okruhem $\mathbb{Z}_3$.

Poznámka

Z poznatků o konečných tělesech vyplývá, že v $\mathbb{Z}_p[x]$, kde p je prvočíslo, existují ireducibilní polynomy libovolného stupně.

Příklad 7

Rozložte polynom $f = x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x + 2$ na součin ireducibilních polynomů ze $\mathbb{Z}_3[x]$.

Příklad 8

Rozložte polynom $f = x^5 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 2x \in \mathbb{Z}_5[x]$ na součin ireducibilních polynomů ze $\mathbb{Z}_5[x]$.

Ireducibilní polynomy v $\mathbb{Z}_p[x]$

Příklad 6

Nalezněte všechny ireducibilní polynomy stupně nejvýše 3 nad okruhem $\mathbb{Z}_3$.

Poznámka

Z poznatků o konečných tělesech vyplývá, že v $\mathbb{Z}_p[x]$, kde p je prvočíslo, existují ireducibilní polynomy libovolného stupně.

Příklad 7

Rozložte polynom $f = x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x + 2$ na součin ireducibilních polynomů ze $\mathbb{Z}_3[x]$.

Příklad 8

Rozložte polynom $f = x^5 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 2x \in \mathbb{Z}_5[x]$ na součin ireducibilních polynomů ze $\mathbb{Z}_5[x]$.

Ireducibilní polynomy v $\mathbb{Z}_p[x]$

Příklad 6

Nalezněte všechny ireducibilní polynomy stupně nejvýše 3 nad okruhem $\mathbb{Z}_3$.

Poznámka

Z poznatků o konečných tělesech vyplývá, že v $\mathbb{Z}_p[x]$, kde p je prvočíslo, existují ireducibilní polynomy libovolného stupně.

Příklad 7

Rozložte polynom $f = x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x + 2$ na součin ireducibilních polynomů ze $\mathbb{Z}_3[x]$.

Příklad 8

Rozložte polynom $f = x^5 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 2x \in \mathbb{Z}_5[x]$ na součin ireducibilních polynomů ze $\mathbb{Z}_5[x]$.

Rozloučení

A to je vše, přátelé.