Pravděpodobnost

Ω – **základní prostor**, množina všech výsledků

$\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ – **možné výsledky**, prvky množiny Ω

A – **náhodný jev**, $A \subseteq \Omega$

A^c – **jev opačný**, $A^c = \Omega - A$

ω_i – **elementární jev**

Ω – **jev jistý**

$\emptyset$ – **jev nemožný**

$A \cap B = \emptyset$ – **jevy neslučitelné**

$A \subseteq B$ – jev B je **důsledkem** jevu A

$\mathcal{A}$ – **jevové pole**, systém podmnožin množiny Ω, který splňuje podmínky:

- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- je-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak je i $A - B \in \mathcal{A}$,
- jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak i $A \cup B \in \mathcal{A}$.

$(\Omega, \mathcal{A})$ – **měřitelný prostor**

Definice 1: Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. **Pravděpodobnost** je $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s vlastnostmi:

1. $P(A) \geq 0$ pro všechna $A \in \mathcal{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. jestliže $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ jsou **po dvou disjunktní** množiny, pak $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_n)$

Trojice $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá **pravděpodobnostní prostor**.

1. Nechť $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Určete všechna možná jevová pole na tomto základním prostoru.

Klasická pravděpodobnost

Definice 2: Nechť základní prostor Ω je konečná neprázdná množina a nechť jevové pole $\mathcal{A}$ je systémem všech podmnožin základního prostoru. Označme $m(\Omega)$ počet všech možných výsledků a pro libovolný jev $A \in \mathcal{A}$ označme $m(A)$ počet možných výsledků příznivých jevu A. Pak reálnou funkci $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ definovanou pro všechna $A \in \mathcal{A}$ vztahem

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \tag{1}$$

nazveme **klasická pravděpodobnost.**

*2. **Vrchcáby** – hod šesti různobarevnými kostkami. Vypočtěte pravděpodobnost následujících „figur“:*

1. A_1 … *na první kostce 1, na druhé 2, … na šesté 6*
2. A_2 … *(sekvens) 1–6 kdekoli*
3. A_3 … *(generál) samé 6*
4. A_4 … *právě 5 šestek*
5. A_5 … *(poker) právě čtyři 6*
6. A_6 … *alespoň čtyři 6*
7. A_7 … *šest stejných*
8. A_8 … *trojice stejných a trojice jiných stejných*
9. A_9 … *tři dvojice stejných*
10. A_{10} … *samé sudé.*

3. Hodíme n-krát po sobě mincí. Jaká je pravděpodobnost, že padne k-krát líc $(0 \le k \le n)$*?*

Podmíněná pravděpodobnost

Definice 3: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $H \in \mathcal{A}$ jev s nenulovou pravděpodobností. Pro každé $A \in \mathcal{A}$ definujeme **podmíněnou pravděpodobnost** vzorcem

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} \tag{2}$$

4. V populaci je 5 % diabetiků, 2 % populace jsou diabetici kuřáci. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolený diabetik je kuřák?

Věta o násobení pravděpodobností: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $A_1, A_2, \dots A_n \in \mathcal{A}$ takové jevy, že $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Pak platí:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \tag{3}$$

Věta o úplné pravděpodobnosti: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a nechť je dán rozklad $\{H_i\,;\, i \in I\}$ základního prostoru Ω na nejvýše spočetně mnoho neslučitelných jevů H_i s vlastností $P(H_i) > 0$ (tzv. apriorní pravděpodobnosti) a $P(\bigcup_{i \in I} H_i) = 1$. Říkáme, že je dán **úplný systém hypotéz**. Potom platí:

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(H_i) \cdot P(A|H_i) \tag{4}$$

5. V osudí je b *bílých a* c *černých koulí. Táhneme dvakrát bez vracení. Jaká je pravděpodobnost, že v 2. tahu bude tažena bílá koule?*

Věta: Za stejných předpokladů jako u výše uvedené věty, pro $P(A) > 0$ a pro libovolný jev $B \in \mathcal{A}$ dostáváme:

1. **Bayesův vzorec**
$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum\limits_{i \in I} P(H_i) \cdot P(A|H_i)} \tag{5}$$

2. **Bayesův vzorec**
$$P(B|A) = \frac{\sum\limits_{i \in I} P(H_i) \cdot P(A|H_i) \cdot P(B|A \cap H_i)}{\sum\limits_{i \in I} P(H_i) \cdot P(A|H_i)} \tag{6}$$

6. V první zásuvce jsou dvě zlaté mince, ve druhé je jedna zlatá a jedna stříbrná mince a ve třetí zůsuvce jsou dvě stříbrné. Zvolíme náhodně zásuvku a vytáhneme minci. Jaká je pravděpodobnost, že v zásuvce zůstane zlatá mince, jesltiže jsme vytáhli stříbrnou?

7. V testu jsou u každé otázky 4 odpovědi. Pokud student nezná odpověď, hádá (pravděpodobnost správné odpovědi je 1/4). Dobrý student zná 90 % odpovědí, slabší 50 %. Jestliže dobrý student zodpověděl určitou otázku správně, jaká je pravděpodobnost, že v tomto případě jen hádal? Jak je to u slabšího?

8. Mezi dvaceti střelci jsou čtyři výborní, deset dobrých a šest průměrných s pravděpodobností zásahu 0.9, 0.7, 0.5. Jaká je pravděpodobnost, že se dva náhodně vybraní střelci oba trefili?

9. U jistého druhu elektrického spotřebiče se s pravděpodobností 0.1 vyskytuje výrobní vada. U spotřebiče s touto výrobní vadou dochází v záruční lhůtě k poruše s pravděpodobností 0.5. Výrobky, které tuto vadu nemají, se v záruční lhůtě porouchají s pravděpodobností 0.01. Jaká je pravděpodobnost, že

1. *u náhodně vybraného výrobku nastane v záruční lhůtě porucha*

2. výrobek, který se v záruční době porouchá, bude mít dotyčnou výrobní vadu?

Stochasticky nezávislé jevy

Definice 4: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Řekneme, že jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou **stochasticky nezávislé** (vzhledem k P), právě když platí multiplikativní vztahy:

$$
\begin{aligned}
\forall i < j : & \; P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \\
\forall i < j < k : & \; P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_k) \\
& \;\vdots \\
& \; P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n)
\end{aligned}
$$

10. V urně máme čtyři lístky s čísly 000, 011, 101, 110. Náhodně vybereme jeden lístek. Uvažujeme tyto tři náhodné jevy:

- A_1 *– vybraný lístek má jedničku na 1. místě*
- A_2 *– vybraný lístek má jedničku na 2. místě*
- A_3 *– vybraný lístek má jedničku na 3. místě.*

Jsou dané jevy stochasticky nezávislé?