Geometrická pravděpodobnost

Borelovské množiny: Na prostoru $\mathbb{R}^k$ uvažujme nejmenší jevové pole $\mathcal{B}$ obsahující všechny k-rozměrné intervaly. Množinám v $\mathcal{B}$ říkáme borelovské množiny (nebo také měřitelné množiny) na $\mathbb{R}^k$. Speciálně pro $k = 1$ jde o množiny, které obdržíme z intervalů konečnými průniky a nejvýše spočetnými sjednoceními.

Definice: Nechť Ω je borelovská množina v $\mathbb{R}^n$ s kladnou a konečnou Lebesgueovou mírou, $\mathcal{A}$ nechť je systém všech borelovských podmnožin množiny Ω a $\mu(A)$ nechť značí Lebesgueovu míru množiny A. Potom množinovou funkci P_G definovanou pro každé $A \in \mathcal{A}$ vztahem $P_G(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ budeme nazývat **geometrickou pravděpodobností**.

*1. **Buffonova úloha:** Rovina je rozdělena stejně od sebe vzdálenými rovnoběžkami. Hodíme na ni jehlu menší délky než je vzdálenost rovnoběžek. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne některou rovnoběžku, jestliže každou polohu jehly považujeme za stejně nadějnou?*

Náhodná veličina

Definice: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se nazývá **náhodná veličina** (vzhledem k jevovému poli $\mathcal{A}$), právě když

$$\forall B \in \mathcal{B} : \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}, \tag{1}$$

tj. úplný vzor každé borelovské množiny je jevem.

Poznámka: Obraz $X(\omega)$ se nazývá **číselná realizace** náhodné veličiny X příslušná k možnému výsledku ω. Množinu $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ zkráceně zapisujeme $\{X \in B\}$ nebo $(X \in B)$

2. Uvažujme hod kostkou a označme elementární jevy ω_i – na kostce padne i $i = 1, 2 \dots 6$, množina el. jevů je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots \omega_6\}$. Zvolme jevové pole $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}\}$. Rozhodněte, zda-li jsou X a Y náhodné veličiny vzhledem k $\mathcal{A}$, pokud platí:

$$X = \begin{cases} 0 & \textit{padne číslo menší než } 3 \\ 1 & \textit{padne číslo větší než } 3 \end{cases}, \qquad Y = \begin{cases} 0 & \textit{padne sudé číslo} \\ 1 & \textit{padne liché číslo} \end{cases}$$

Distribuční funkce

Definice: Funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definována vztahem

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = P(X \leq x), \tag{2}$$

kde $P(X \leq x)$ značí $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$, se nazývá **distribuční funkce** náhodné veličiny X (vzhledem k P).
Distribuční funkce má tyto vlastnosti:

1. je neklesající, tj. pro všechna $x_1 < x_2 : F(x_1) \leq F(x_2)$
2. je zprava spojitá, tj. pro všechna $x_0 \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$
3. $0 \leq F(x) \leq 1$
4. Pro $x_0 \in \mathbb{R}$ libovolné, ale pevně zvolené je
$$P(X = x_0) = F(x_0) - \lim_{x \to x_0^-} F(x)$$
5. Pro $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ je $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Diskrétní náhodná veličina

Definice: Náhodná veličina X s distribuční funkcí $F(x)$ se nazývá **diskrétní**, jestliže existuje neprázdná, nejvýše spočetná podmnožina N reálných čísel a funkce $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s těmito vlastnostmi:

1. $\pi(x) > 0$ pro $x \in N$
   $\pi(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R} - N$
2. $\sum\limits_{x \in \mathbb{R}} \pi(x) = \sum\limits_{x \in N} \pi(x) = 1$

a pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme $F(x) = \sum\limits_{t \leq x} \pi(t)$. Funkce $\pi(x)$ se nazývá **pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny** X.

3. Třikrát nezávisle na sobě házíme mincí. Náhodná veličina X udává počet líců při těchto třech hodech. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci této náhodné veličiny.

Spojitá náhodná veličina

Definice: Řekneme, že náhodná veličina X je (absolutně) **spojitá**, jestliže existuje nezáporná borelovská funkce f tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Funkce f se nazývá **hustota** náhodné veličiny X a je určena jednoznačně až na borelovské množiny míry 0 a platí:

1. $f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

4. Určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ ax^2 & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

byla distribuční funkcí.

5. Pravděpodobnost, že výrobek bude vyhovovat všem technickým požadavkům je 0,9. Popište rozdělení (pravděpodobnostní a distribuční funkci) počtu nevyhovujících mezi třemi výrobky.

6. Náhodná veličina X má distribuční funkci:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -5 \\ \frac{x+5}{7} & -5 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

Vypočítejte:

1. *hustotu pravděpodobnosti* $f(x)$
2. $P(-2 < X < 2)$
3. $P(X = 2)$
4. $P(-6 < X < 1)$