Kvantilová funkce

Definice: Nechť $F(x)$ je distribuční funkce náhodné veličiny X. Funkce

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq u\}, \quad 0 < u < 1,$$

se nazývá **kvantilová funkce** náhodné veličiny X. Pro $0 < \alpha < 1$ se hodnota $F^{-1}(\alpha)$ nazývá α-kvantil.

Pozn.: Pokud je distribuční funkce $F(x)$ rostoucí a spojitá je kvantilová funkce totožná s obyčejnou inverzní funkcí k distribuční funkci.

$0,5$-kvantil $\rightarrow$ medián
$0,25$-kvantil $\rightarrow$ dolní kvartil
$0,75$-kvantil $\rightarrow$ horní kvartil.

Náhodný vektor

Definice: Náhodný vektor je uspořádaná n-tice $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots X_n)$, kde X_i jsou náhodné veličiny na pravděpodobonostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Jeho distribuční funkci definujeme vztahem:

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n; F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1 \wedge X_2 \leq x_2 \wedge \cdots \wedge X_n \leq x_n).$$

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je neklesající, zprava spojitá vzhledem ke každé jednotlivé proměnné a dále

$$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \cdots \\ x_n \to \infty}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}; \lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}; \lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \cdots \\ x_{i-1} \to \infty \\ x_{i+1} \to \infty \\ \cdots \\ x_n \to \infty}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_i(x_i).$$

$F_i(x_i)$ se nazývá **marginální distribuční funkce** náhodné veličiny X_i a $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se nazývá **simultánní (sdružená) distribuční funkce** náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

Diskrétní náhodný vektor

Definice: Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots X_n)$ se nazývá diskrétní, právě když existuje funkce $\pi(x_1, \dots, x_n)$, která je kladná na nejvýše spočetné množině $N \subseteq \mathbb{R}^n$, nulová na množině $\mathbb{R}^n - N$, je normovaná

$$\sum_{x1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{x_n=-\infty}^{\infty} \pi(x_1, \dots, x_n) = 1$$

a platí pro ni:

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n; F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{t \le x_1} \cdots \sum_{t \le x_n} \pi(t_1, \dots, t_n).$$

Funkce $\pi(x_1, \dots, x_n)$ se nazývá **pravděpodobnostní funkce** náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$. Dále platí:

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n; \pi(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1 \wedge X_2 = x_2 \wedge \dots, X_n = x_n).$$
$$\forall i \in \{1, \dots, n\}; \sum_{x_1 \in \mathbb{R}} \cdots \sum_{x_{i-1} \in \mathbb{R}} \sum_{x_{i+1} \in \mathbb{R}} \cdots \sum_{x_n \in \mathbb{R}} \pi(x_1, \dots, x_n) = \pi_i(x_i)$$

$\pi_i(x_i)$ se nazývá **marginální pravděpodobnostní funkce** náhodné veličiny X_i a $\pi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se nazývá **simultánní (sdružená) pravděpodobnostní funkce** náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

1. V zásilce 10 výrobků je 8 kvalitních a 2 zmetky, z 8 kvalitních je pět 1. jakosti a tři 2. jakosti. Ze zásilky vybereme 2 výrobky (bez vracení). Náhodná veličina X značí počet kvalitních výrobků a Y počet výrobků 1. jakosti. Určete sdruženou a marginální pravděpodobnostní i distribuční funkci $\pi(x, y)$ a $F(x, y)$.

Spojitý náhodný vektor

Definice: Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots X_n)$ se nazývá spojitý, právě když existuje po částech spojitá funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ s vlastností

$$\forall (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n; f(x_1, \dots, x_n) \ge 0$$

a která je normovaná

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) = 1$$

a platí pro ni:

$$\forall (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n; F(x_1, \dots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \dots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n)\, \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n.$$

Funkce $\pi(x_1, \dots, x_n)$ se nazývá **hustota pravděpodobnostní** náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$. Dále platí:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$$

ve všech bodech spojitosti funkce $f(x_1, \dots, x_n)$.

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{i-1}\, \mathrm{d}x_{i+1} \dots \mathrm{d}x_n = f_i(x_i)$$

$f_i(x_i)$ se nazývá **marginální hustota** náhodné veličiny X_i a $f(x_1, x_2, \dots, x_n)'$ se nazývá **simultánní (sdružená) hustota** náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

2. Spojitý náhodný vektor (X_1, X_2, X_3) má hustotu

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} k \cdot x_1 x_2 x_3^2 & \textit{pro } 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, 0 < x_3 < 3 \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

1. *Určete konstantu k.*
2. *Vypočtěte $P(0 < X_1 < 1/2, 1/3 < X_2 < 2/3, 1 < X_3 < 2)$.*

Stochasticky nezávislé náhodné veličiny

Věta: Náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ jsou stochasticky nezávislé, právě když pro každé $x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ platí:

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \ldots \cdot F_n(x_n)$$

resp. $\pi(x_1, \dots, x_n) = \pi_1(x_1) \cdot \ldots \cdot \pi_n(x_n)$ (v diskrétním případě), resp. $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$ (ve spojitém případě).

3. Určete, zda-li jsou náhodné veličiny X a Y v příkladu 1 stochasticky nezávislé.

4. Spojitý náhodný vektor (X_1, X_2) *má hustotu*

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 24x_1^2 x_2(1 - x_1) & \textit{pro } 0 \le x_1 < 1, 0 \le x_2 < 1 \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

Dokažte, že náhodné veličiny X_1 *a* X_2 *jsou stochasticky nezávislé.*

Transformace náhodné veličiny

Borelovské funkce: Zobrazení $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nazýváme **borelovskou funkcí**, právě když úplný vzor každé borelovské množiny je opět borelovská množina, tj.

$$\forall B \in \mathcal{B}^m; \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; (g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)) \in B\} \in \mathcal{B}^n$$

Pozn.: Jedná se zejména o funkce spojité.

Z dané náhodné veličiny $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vytvoříme pomocí borelovské funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zobrazení $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, dané takto:

$$\forall \omega \in \Omega; Y(\omega) = g(X(\omega)).$$

Toto zobrazení je opět náhodná veličina a nazývá se **transformovaná** náhodná veličina.

Náhodná veličina X má distribuční funkci $F(x)$ a pravděpodobnostní funkci $\pi(x)$ nebo hustotu $f(x)$. Náhodná veličina $Y = g(X)$ má distribuční funkci $F_*(y)$ a pravdepodobnostní funkci $\pi_*(y)$ nebo hustotu $f_*(y)$. Označíme τ inverzní funkci k funkci g, pak platí:

1. X je diskrétní náhodná veličina

$$\pi_*(y) = P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(X = \tau(y)) = \pi(\tau(y))$$

2. X je spojitá náhodná veličina, g je rostoucí funkce a nechť existuje derivace funkce τ

$$F_*(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = P(X \le \tau(y)) = F(\tau(y))$$
$$f_*(y) = \frac{\mathrm{d}F_*(y)}{\mathrm{d}y} = f(\tau(y))\frac{\mathrm{d}\tau(y)}{\mathrm{d}y}$$

3. X je spojitá náhodná veličina, g je klesající funkce a nechť existuje derivace funkce τ

$$F_*(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = P(X \ge \tau(y)) = 1 - P(X \le \tau(y)) = 1 - F(\tau(y))$$
$$f_*(y) = \frac{\mathrm{d}F_*(y)}{\mathrm{d}y} = -f(\tau(y))\frac{\mathrm{d}\tau(y)}{\mathrm{d}y}$$

Celkem pro spojitou náhodnou veličinu X platí:

$$f_*(y) = \frac{\mathrm{d}F_*(y)}{\mathrm{d}y} = f(\tau(y))\left|\frac{\mathrm{d}\tau(y)}{\mathrm{d}y}\right|$$

5. Náhodná veličina X *má normální rozdělení, tedy* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$*, provedem transformaci* $Y = a + bX$*, kde* $b \neq 0$*. Určete* $f_*(y)$*.*

6. Jaká je pravděpodobnost, že náhodná veličina X*, která má rozdělení* $N(20, 16)$*, nabude hodnoty:*

1. *menší než 16*
2. *větší než 20*
3. *v mezích od 12 do 28*
4. *menší než 12 nebo větší než 28?*