

## Transformace náhodné veličiny

**Borelovské funkce:** Zobrazení  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  nazýváme **borelovskou funkcí**, právě když úplný vzor každé borelovské množiny je opět borelovská množina, tj.

$$\forall B \in \mathcal{B}^m; \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; (g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)) \in B\} \in \mathcal{B}^n$$

Pozn.: Jedná se zejména o funkce spojité.

Z dané náhodné veličiny  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  vytvoříme pomocí borelovské funkce  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zobrazení  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dané takto:

$$\forall \omega \in \Omega; Y(\omega) = g(X(\omega)).$$

Toto zobrazení je opět náhodná veličina a nazývá se **transformovaná** náhodná veličina.

Náhodná veličina  $X$  má distribuční funkci  $F(x)$  a pravděpodobnostní funkci  $\pi(x)$  nebo hustotu  $f(x)$ . Náhodná veličina  $Y = g(X)$  má distribuční funkci  $F_*(y)$  a pravděpodobnostní funkci  $\pi_*(y)$  nebo hustotu  $f_*(y)$ . Označíme  $\tau$  inverzní funkci k funkci  $g$ , pak platí:

1.  $X$  je diskrétní náhodná veličina

$$\pi_*(y) = P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(X = \tau(y)) = \pi(\tau(y))$$

2.  $X$  je spojitá náhodná veličina,  $g$  je rostoucí funkce a nechť existuje derivace funkce  $\tau$

$$F_*(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq \tau(y)) = F(\tau(y))$$

$$f_*(y) = \frac{dF_*(y)}{dy} = f(\tau(y)) \frac{d\tau(y)}{dy}$$

3.  $X$  je spojitá náhodná veličina,  $g$  je klesající funkce a nechť existuje derivace funkce  $\tau$

$$F_*(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq \tau(y)) = 1 - P(X \leq \tau(y)) = 1 - F(\tau(y))$$

$$f_*(y) = \frac{dF_*(y)}{dy} = -f(\tau(y)) \frac{d\tau(y)}{dy}$$

Celkem pro spojitou náhodnou veličinu  $X$  platí:

$$f_*(y) = \frac{dF_*(y)}{dy} = f(\tau(y)) \left| \frac{d\tau(y)}{dy} \right|$$

1. Náhodná veličina  $X$  má normální rozdělení, tedy  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , provedem transformaci  $Y = a + bX$ , kde  $b \neq 0$ . Určete  $f_*(y)$ .

2. Jaká je pravděpodobnost, že náhodná veličina  $X$ , která má rozdělení  $N(20, 16)$ , nabude hodnoty:

- a) menší než 16
- b) větší než 20
- c) v mezích od 12 do 28
- d) menší než 12 nebo větší než 28?

3. Náhodná veličina  $Y$  je funkcí náhodné veličiny  $X$  (tedy  $Y = g(X)$ ). Určete, čemu se rovná hustota pravděpodobnosti  $f_*(y)$  jestliže platí:

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} ; \quad Y = X^2$$

4. Hledáme hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny  $Y = X_1 + X_2$ , pro  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , jestliže známe sdruženou hustotu pravděpodobnosti  $f(x_1, x_2)$ .

5. Hledáme pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny  $Y$ , jestliže platí:

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{pro } x = 0, 1, \dots \quad \lambda > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} ; \quad Y = 4X$$

## Číselné charakteristiky náhodných veličin

### Střední hodnota

Je-li dána diskrétní náhodná veličina  $X$  s pravděpodobnostní funkcí  $\pi(x)$ , pak číslo

$$E(X) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot \pi(x),$$

za předpokladu, že případná nekonečná řada absolutně konverguje, nazýváme střední hodnotou náhodné veličiny  $X$ .

Je-li náhodná veličina spojitá s hustotou  $f(x)$ , pak číslo

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx,$$

za předpokladu, že nevlastní Riemannův integrál absolutně konverguje, nazýváme její střední hodnotou.

Nechť  $g(x)$  je borelovská funkce. Pak pro střední hodnotu náhodné veličiny  $Y = g(x)$  platí:

$$E(Y) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} g(x) \pi(x) & \text{v diskrétním případě} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx & \text{ve spojitém případě} \end{cases}$$

pokud nekonečná řada, resp. Riemannův integrál, absolutně konvergují.

### Rozptyl

Číslo  $D(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$  nazýváme rozptylem náhodné veličiny  $X$  za předpokladu, že všechny uvedené střední hodnoty existují.

Číslo  $\sqrt{D(X)}$  nazýváme směrodatnou odchylkou náhodné veličiny  $X$ .

### Kovariance

Číslo  $C(X_1, X_2) = E[(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))]$  nazýváme kovariancí náhodných veličin  $X_1$  a  $X_2$  za předpokladu, že všechny uvedené střední hodnoty existují. Je-li  $C(X_1, X_2) = 0$ , pak řekneme, že náhodné veličiny  $X_1$  a  $X_2$  jsou nekorelované.

### Korelace

Číslo  $R(X_1, X_2) = E\left(\frac{X_1 - E(X_1)}{\sqrt{D(X_1)}} \cdot \frac{X_2 - E(X_2)}{\sqrt{D(X_2)}}\right)$ ,  $D(X_1)D(X_2) \neq 0$  nazveme korelací náhodných veličin  $X_1$  a  $X_2$  (a za předpokladu, že všechny střední hodnoty existují),  $R(X_1, X_2) = 0$  jinak.

### Vlastnosti:

Nechť  $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2$  jsou konstanty a  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$  náhodné veličiny definované na témže pravděpodobnostním prostoru.

1. Střední hodnota

- (a)  $E(a) = a$
- (b)  $E(a + bX) = a + bE(X)$
- (c)  $E(X - E(X)) = 0$
- (d)  $E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$
- (e) Jsou-li náhodné veličiny  $X_1, \dots, X_n$  stochasticky nezávislé, pak:  $E(\prod_{i=1}^n X_i) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$

2. Rozptyl

- (a)  $D(a) = 0$
- (b)  $D(a + bX) = b^2 D(X)$
- (c)  $D(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n D(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n C(X_i, X_j)$ . Jsou-li veličiny  $X_1, \dots, X_n$  nekorelované, pak platí:  $D(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n D(X_i)$

3. Kovariance

- (a)  $C(a_1, X_2) = C(X_1, a_2) = C(a_1, a_2) = 0$
- (b)  $C(a_1 + b_1 X_1, a_2 + b_2 X_2) = b_1 b_2 C(X_1, X_2)$
- (c)  $C(X, X) = D(X)$
- (d)  $C(X_1, X_2) = C(X_2, X_1)$
- (e)  $C(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)$
- (f)  $C(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m C(X_i, Y_j)$

4. Korelace

- (a)  $R(a_1, X_2) = R(X_1, a_2) = R(a_1, a_2) = 0$
- (b)  $R(a_1 + b_1 X_1, a_2 + b_2 X_2) = \text{sgn}(b_1 b_2) R(X_1, X_2)$
- (c)  $R(X_1, X_2) = R(X_2, X_1)$
- (d)  $R(X_1, X_2) = \frac{C(X_1, X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}}$ ,  $D(X_1)D(X_2) \neq 0$ ,  $R(X_1, X_2)$  jinak.

6. Náhodná veličina  $X$  má konstantní hodnotu pravděpodobnosti v intervalu  $(0, a)$ , to znamená, že její hustota pravděpodobnosti má tvar:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{pro } 0 < x < a \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

S použitím vlastností střední hodnoty a rozptylu určíme

1.  $E(2X + 3)$
2.  $E(3X^2 - 2X + 1)$

3.  $D(2X + 3)$

4.  $D(X^2 + 1)$

7. *Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny  $X$ , která má Poissonovo rozdělení s parametrem  $\lambda$ .*

8. *Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny  $X$ , která má exponenciální rozdělení s parametrem  $\lambda$ .*