Nerovnosti

Cauchyho–Swartzova–Buňakovského nerovnost

Nechť X_1, X_2 jsou náhodné veličiny. Jestliže existují jejich střední hodnoty a rozptyly, pak

$$|C(X_1, X_2)| \leq \sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}, \text{tj. } |R(X_1, X_2)| \leq 1$$

Markovova nerovnost

Jestliže je $P(X > 0) = 1$ a $E(X)$ existuje, pak pro všechna $\varepsilon > 0$ platí

$$P(X > \varepsilon E(X)) \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

1.Nechť X je nezáporná náhodná veličina, $E(X) = \delta$.

1. *Jesliže rozložení náhodné veličiny X neznáme, odhadněte $P(X > 3\delta)$*
2. *Jestliže $X \sim Ex(1/\delta)$, vypočtěte $P(X > 3\delta)$*

Čebyševova nerovnost

Jestliže existují $E(X)$ a $D(X)$, pak pro každé $t > 0$ platí:

$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{D(X)}{t^2}$$

2. Zásilka obsahuje 3000 výrobků určitého typu. Je známo, že pravděpodobnost zhotovení vadného výrobku tohoto typu je 0,04.

a) Odhadněte pravděpodobnost, že absolutní odchylka podílu vadných výrobků v zásilce a pravděpodobnost vyrobení vadného výrobku bude menší než 1 %.

b) Jak se změní výsledek, jestliže pravděpodobnost vyrobení zmetku bude 0,004 a jestliže zásilka bude obsahovat 30000 výrobků?

Zákon velkých čísel a centrální limintí věty

Konvergence náhodných veličin

Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost náhodných veličin s distribučními funkcemi $F(x_1), F(x_2), \ldots$ a X náhodná veličina s distribuční funkcí $F(x)$. Nechť jsou všechny tyto veličiny definovány na témže pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Řekneme, že posloupnost $X_1, X_2, \ldots$ **konverguje** k X

1. **jistě**, právě když pro všechna $\omega \in \Omega$ platí
$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$
2. **podle pravděpodobnosti**, právě když pro všechna $\varepsilon > 0$ platí
$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$
3. **v distribuci (podle rozložení)**, právě když pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí
$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$
v každém bodě spojitosti funkce $F(x)$.

Slabý zákon velkých čísel

Čebyševova věta: Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou nekorelované náhodné veličiny jejichž střední hodnoty splňují vztah
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \mu$$
a rozptyly jsou shora ohraničené týmž číslem δ. Pak posloupnost aritmetických průměrů
$$\{X_1, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} X_i, \ldots \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \ldots\}$$
konverguje podle pravděpodobnosti k číslu μ.

Bernoulliova věta: Nechť je dána náhodná veličina $Y_n \sim Bi(n, \theta)$, pak posloupnost relativních četností
$$\{Y_1, \frac{Y_2}{2}, \ldots, \frac{X_n}{n}, \ldots\}$$
konverguje podle pravděpodobnosti k parametru θ.

Centrální limitní věta a její důsledky

Lindebergova–Lévyova centrální limitní věta: Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost stochasticky nezávislých náhodných veličin se stejným rozložením, $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2$,

$i = 1, 2, \ldots$. Pak posloupnost standardizovaných součtů

$$\left\{ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

konverguje v distribuci ke standardizované normální náhodné veličině.

3. Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že doba potřebná k objevení a odstranění poruchy stroje – náhodná veličina X_i – má střední hodnotu $E(X_i) = 40$ minut a rozptyl $D(X_i) = 900$ minut. Jakou dobu si vyžádá objevení a odstranení 100 poruch, jestliže žádáme, aby tato hodnota nebyla s pravděpodobností 0,95 překročena?

Moivre–Laplaceova věta: Nechť $Y_1, Y_2, \ldots$ je posloupnost stochasticky nezávislých náhodných veličin, $Y_n \sim Bi(n, \theta)$, $n = 1, 2 \ldots$ Pak posloupnost standardizovaných náhodných veličin

$$\left\{ \frac{Y_n - n\theta}{\sqrt{n \cdot \theta(1-\theta)}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

konverguje v distribuci ke standardizované náhodné veličině $U \sim N(0, 1)$.

Pozn.: Aproximace se považuje za vyhovující, jsou-li splněny podmínky

$$n\theta(1-\theta) > 9 \quad \text{a} \quad \frac{1}{n+1} < \theta < \frac{n}{n+1}$$

4. Pravděpodobnost narození chlapce je 0,515. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 10000 novorozenci bude

1. *více děvčat než chlapců;*
2. *chlapců od 5000 do 5300;*
3. *relativní četnost chlapců v mezích od 0,515 do 0,517*

5. Víme, že v jisté oblasti je 80 % domácností vybaveno videem. Vylosujeme 900 domácností. Jaký bude s pravděpodobností 0.95 počet vybraných domácností, které vlastní video?

Poissonova věta: Nechť $Y_1, Y_2, \dots$ je posloupnost stochasticky nezávislých náhodných veličin, $Y_n \sim B(n, \theta_n)$, $n = 1, 2 \dots$ a nechť platí $\lim\limits_{n\to\infty} n\theta_n = \lambda$. Pak posloupnost $Y_1, Y_2, \dots$ konverguje v distribuci k náhodné veličině $Y \sim Po(\lambda)$, tj. pro všechna $y = 0, 1, 2, \dots$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \le y) = \sum_{t=0}^{y} \frac{\lambda^t}{t!} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

Pozn.: Aproximace se považuje za vyhovující, jsou-li splněny podmínky $n \ge 30$ a $\theta \le 0,1$.

6. Během zkoušky spolehlivosti se výrobek porouchá s pravděpodobností $\theta = 0.05$*. Jaká je pravděpodobnost, že při zkoušení 100 výrobků se jich porouchá alespoň 5.*