Budíková M. – Statistika

ESF MU

http://www.math.muni.cz/~budikova/

/esf/statistika.zip

Hypotéza ... tvrzení o parametrech rozdělení náhodného výběru

Def: H_0 ... nulová hypotéza

($\Theta = c$, c ... naše domněnka o hodnotě θ)

H_1 ... alternativní hypotéza (oboustranná) ($\theta \neq c$)

Testujeme H_0 proti alternativě H_1.

Platnost H_0 zamítáme nebo nezamítáme (připouštíme)

Chyby testování

	H_0 platí	H_0 neplatí
zamítáme	1. druhu	
nezamítáme		2. druhu

Př: H_0 ... daný mail je „ham" (není spam)

Pravděpodobnost chyby 1. druhu nazýváme hladina významnosti ($\alpha = 0{,}05$)

Pravděpodobnost chyby 2. druhu β ... $(1-\beta)$ je síla testu

Testování:

1. pomocí intervalu spolehlivosti
2. pomocí tzv. kritického oboru
3. pomocí p-hodnoty (p-value)

ad 1. sestrojíme $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro Θ [se znalostí náhodného výběru] a zjistíme-li, že c nepatří do intervalu, hypotézu H_0 zamítneme.

ad 2. Kritický obor

Zvolíme vhodnou (pivotovou) statistiku T se známým rozdělením a obor hodnot T rozdělíme na 2 disj. podmnožiny:

W ... kritický obor (obor zamítnutí H_0)

V ... obor nezamítnutí H_0

Spočítáme z naší výběrem realizaci T a zjistíme, jestli její hodnota $\in W$.

často: $W = \left(-\infty, F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \cup \left(F^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \infty\right)$

ad 3. pomocí p-hodnoty

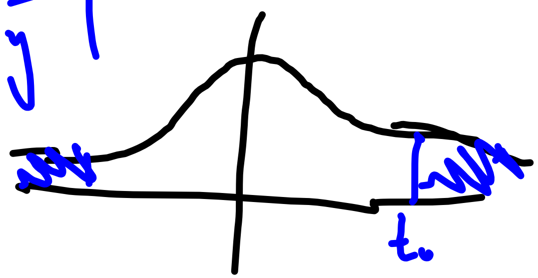
p-hodnota udává nejnižší hladinu významnosti, při níž H_0 zamítneme

je-li $\alpha < p$ ... hypotézu nezamítáme

$\alpha \geq p$ ... zamítáme

obvykle $p = 2 \min\{P(T < t_0), P(T \geq t_0)\}$

kde t_0 je realizace statistiky T



Testování proti jednostranným alternativám

H_0: $\Theta = c$

H_1: $\Theta > c$ (pravostranná)

$\Theta < c$ (levostranná)

Př.: ① H_0: 2 zadání mají stejnou obtížnost

H_1: ... nemají

② zavedly domácí úkoly, zlepšilo se hodnocení?

H_0: $\Theta = c$

H_1: $\Theta > c$ (prokazatelně se zlepšilo hodn.)

Př. 60 hodů kostkou

soupeři padla 16x šestka

- Na hladině významnosti 0,05 testujme hypotézu H_0: kostka není upravená oproti jednostranné alternativní hypotéze

H_1: je upravená tak, aby padlo více šestek

T ... počet šestek $T \sim Bi(60, 1/6)$

kritický obor ... 95. percentilem $Bi(60, 1/6)$

$$P(T=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

$$P(T>14) = 0{,}065$$

$$P(T>15) = 0{,}034$$

p-hodnota: $p = 0{,}034$

$$X = \frac{T - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{T - 10}{\sqrt{\frac{50}{6}}} \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\sigma^2 = 1$$

$T \sim Bi(n, p)$

$X \sim N(0, 1)$

Testujeme: $\mu = 0$

Kritický obor $(u_{0,95}, \infty)$

$= (1{,}65; \infty)$

$$x = \frac{16 - 10}{\sqrt{\frac{50}{6}}} \doteq 2{,}08 > 1{,}65$$

$\Rightarrow$ hypotézu H_0 zamítáme

pomocí aproximace a p-hodnoty!

$$x = 2{,}08 \qquad X = \frac{T-10}{\sqrt{\frac{50}{6}}} \sim N(0,1)$$

$$p = P(X \geq 2{,}08) = 1 - 0{,}981 = 0{,}019 \Rightarrow \text{zamítáme}$$

hypotézy o parametry normálního rozdělení

z-test: $X_1, \dots, X_n$ n.v. z $N(\mu, \sigma^2)$

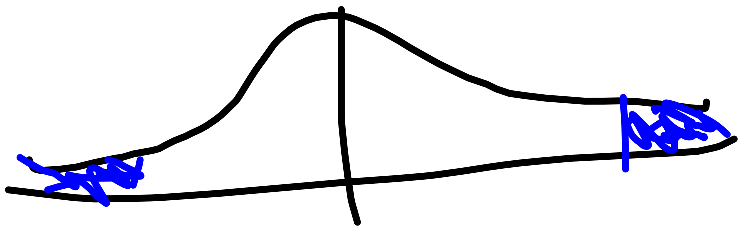
známe σ^2, $n \geq 2$

$H_0: \mu = c$

$(H_1: \mu \neq c)$

krit. obor: $\left| \dfrac{M - \overset{\mu}{c}}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

(kvantil $N(0,1)$)



jednovýběrový t-test: $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ $n \geq 2$

neznámé σ^2

$H_0: \mu = c$

krit. obor: $\left| \frac{M - c}{S/\sqrt{n}} \right| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

dvouvýběrový t-test:

$X_{11}, \dots, X_{m1} \sim N(\mu_1, \boxed{\sigma^2})$

nezávislý

$X_{12}, \dots, X_{n1} \sim N(\mu_2, \boxed{\sigma^2})$

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = c$

krit. obor: $\left| \frac{M_1 - M_2 - c}{S_* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \right| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$

párový t-test:

F-test:

$$X_{11},\dots,X_{m1} \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$$
$$\ne$$
$$X_{12},\dots,X_{n2} \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$$

kritický obor: $S_1^2/S_2^2 \le F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)$

nebo $S_1^2/S_2^2 \ge F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)$

test rozptylu:

$$X_1,\dots,X_n \sim N(\mu,\sigma^2)$$

$H_0: \sigma^2 = c$ k.o. $\frac{(n-1)S^2}{c} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

$\ge \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum X_i^2 - \mu^2\right]$$