Matematika IV – 8. přednáška
Náhodné veličiny – základní vlastnosti a typy

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

14. 4. 2008

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, *e*-text.
- Karel Zvára, Josef Štěpán, **Pravděpodobnost a matematická statistika**, Matfyzpress, 4. vydání, 2006, 230 stran, ISBN 80-867-3271-1.
- Marie Budíková, Štěpán Mikoláš, Pavel Osecký, **Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika (sbírka příkladů)**, Masarykova univerzita, 3. vydání, 2004, 117 stran, ISBN 80-210-3313-4.
- Marie Budíková, Štěpán Mikoláš, Pavel Osecký, **Popisná statistika**, Masarykova univerzita, 3. vydání, 2002, 48 stran, ISBN 80-210-1831-3.
- Marie Budíková, Tomáš Lerch, Štěpán Mikoláš, **Základní statistické metody**, Masarykova univerzita, 2005, 170 stran, ISBN 80-210-3886-1.

Na prostoru $\mathbb{R}^k$ uvažujme nejmenší jevové pole $\mathcal{B}$ obsahující všechny k–rozměrné intervaly. Množinám v $\mathcal{B}$ říkáme **borelovské množiny** (nebo také měřitelné množiny) na $\mathbb{R}^k$.
Speciálně pro $k = 1$ jde o množiny, které obdržíme **z intervalů konečnými průniky a nejvýše spočetnými sjednoceními**.

Definice

Náhodná veličina X na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je taková funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$, že vzor $X^{-1}(B)$ patří do $\mathcal{A}$ pro každou Borelovskou množinu $B \in \mathcal{B}$ na $\mathbb{R}$ (tj. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je tzv. borelovsky měřitelná).
Množinová funkce

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

se nazývá **rozdělení pravděpodobnosti** náhodné veličiny X.
Náhodný vektor $(X_1, \ldots, X_k)$ na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je k–tice náhodných veličin.

Definice náhodné veličiny zajišťuje, že pro všechny $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ existuje pravděpodobnost $P(a < X \leq b)$, kde používáme stručné značení pro jev $A = (\omega \in \Omega;\ a < X(\omega) \leq b))$.

Definice

Distribuční funkcí (*distribution, cumulative density function*) náhodné veličiny X je funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná pro všechny $x \in \mathbb{R}$ vztahem

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Distribuční funkcí náhodného vektoru $(X_1, \ldots, X_k)$ je funkce $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definovaná pro všechny $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ vztahem

$$F(x) = P(X_1 \leq x_1 \wedge \cdots \wedge X_k \leq x_k).$$

Diskrétní náhodné veličiny

Předpokládejme, že náhodná veličina X na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nabývá jen konečně mnoha hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Pak existuje tzv. **pravděpodobnostní funkce** $f(x)$ taková, že

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) & \text{pro } x = x_i \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Evidentně $\sum_1^n f(x_i) = 1$.
Takové náhodné veličině se říká **diskrétní**.
Každá náhodná veličina definovaná pro klasickou pravděpodobnost je diskrétní. Obdobně lze definici pravděpodobnostní funkce rozšířit na veličiny se spočetně mnoha hodnotami (pracujeme pak s nekonečnými řadami)

Spojité náhodné veličiny

I když hodnoty náhodné veličiny X nejsou diskrétní, můžeme postupovat podobně s užitím ideí diferenciálního a integrálního počtu. Intuitivně lze uvažovat takto: **hustotu** $f(x)$ **pravděpodobnosti** pro X si představíme jako

$$P(x < X \leq x + dx) = f(x)dx.$$

To znamená, že chceme pro $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (*)$$

Definice

Náhodná veličina X, pro kterou existuje její **hustota pravděpodobnosti** splňující $(*)$, se nazývá **spojitá**.

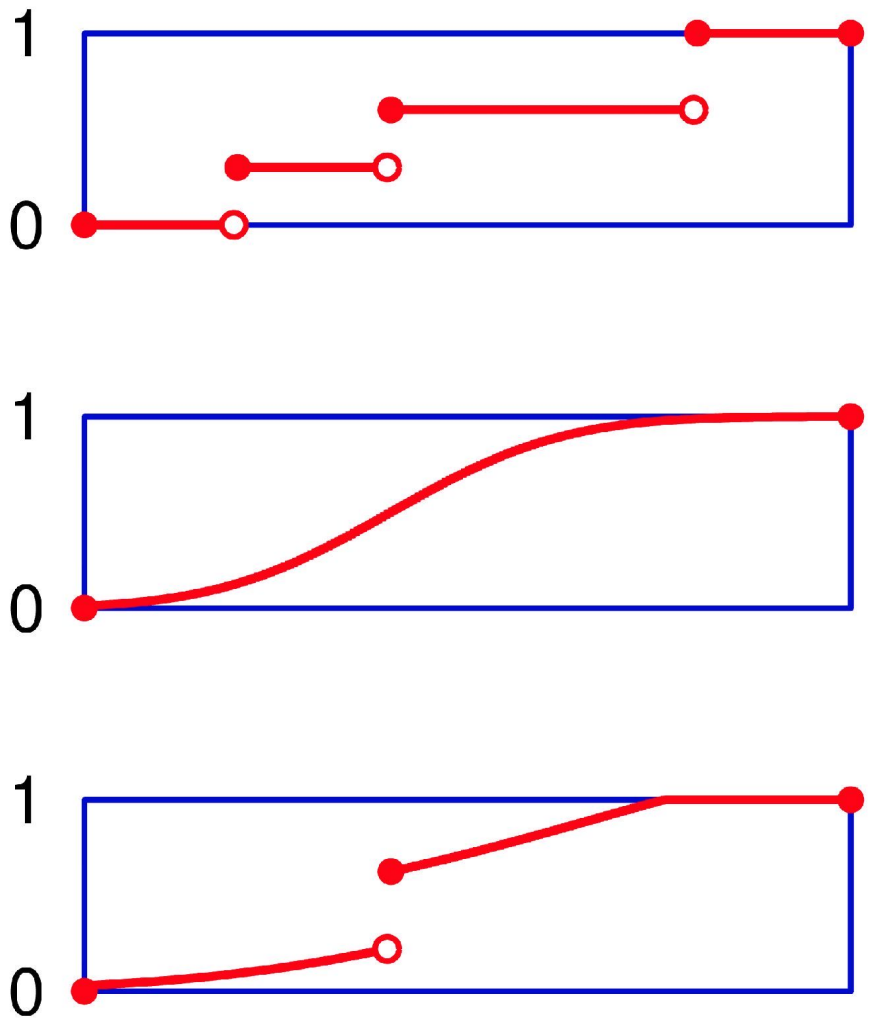
Vlastnosti distribuční funkce

Věta

Nechť X je náhodná veličina, $F(x)$ je její distribuční funkce.

1. *F je neklesající.*
2. *F je zprava spojitá, $\lim_{x\to-\infty} = 0$ a $\lim_{x\to\infty} = 1$.*
3. *Je-li X diskrétní s hodnotami $x_1, \ldots, x_n$, pak je $F(x)$ po částech konstantní, $F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$ a $F(x) = 1$ kdykoliv $x \geq x_n$.*
4. *Je-li X spojitá, pak je $F(x)$ diferencovatelná a její derivace se rovná hustotě X, tj. platí $F'(x) = f(x)$.*

Distribuční funkce



Obdobně definujeme distribuční funkce a hustotu a pravděpodobnostní funkci pro spojité a diskrétní náhodné **vektory**. Hovoříme také o **simultánních pravděpodobnostních funkcích a hustotách**.

Pro dvě proměnné (vektor (X, Y) náhodných veličin):

$$f(x,y) = \begin{cases} P(X = x_i \wedge Y = y_i) & x = x_i \wedge y = y_i \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

u diskrétních a pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$ pro spojité:

$$P(-\infty < X \leq b, -\infty < Y \leq b) = \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} f(x,y)dxdy.$$

Marginální rozložení pro jednu z proměnných obdržíme tak, že přes ostatní posčítáme nebo zintegrujeme.

Náhodné veličiny X a Y jsou **stochasticky nezávislé**, jestliže je jejich simultánní distribuční funkce

$$F(x,y) = G(x) \cdot H(y)$$

kde F a G jsou distribuční funkce veličin X a Y.

Alternativní rozdělení popisuje pokus se dvěma možnými výsledky, často nazývanýni *zdar*, resp. *nezdar*. Náhodná veličina $X \sim A(p)$ nabývá hodnoty 1 (*zdar)* s pravděpodobností p. Distribuční a pravděpodobnostní funkce jsou tedy tvaru:

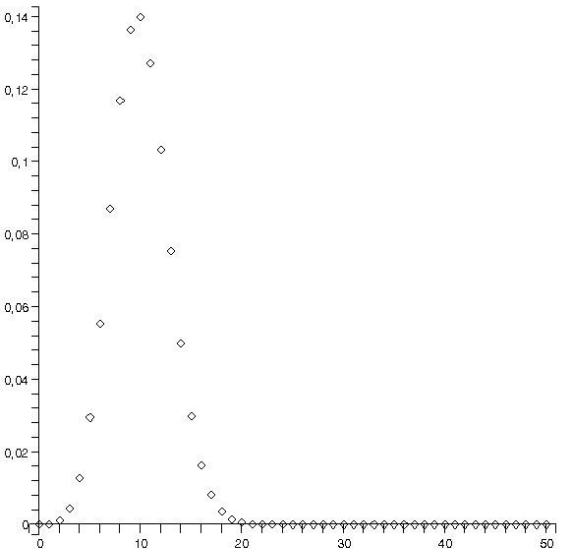
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1-p & 0 \leq t < 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases} \qquad f_X(t) = \begin{cases} p & t = 1 \\ 1-p & t = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

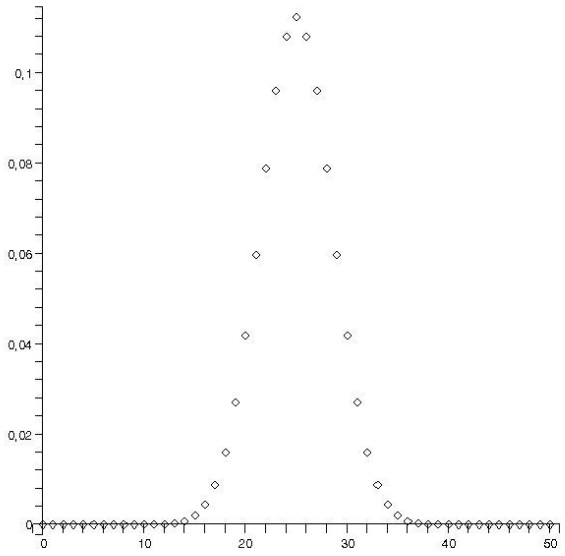
Binomické rozdělení $\mathrm{Bi}(n, p)$ odpovídá n–krát nezávisle opakovanému pokusu popsanému alternativním rozdělením, přičemž naše náhodná veličina měří počet zdarů. Je tedy

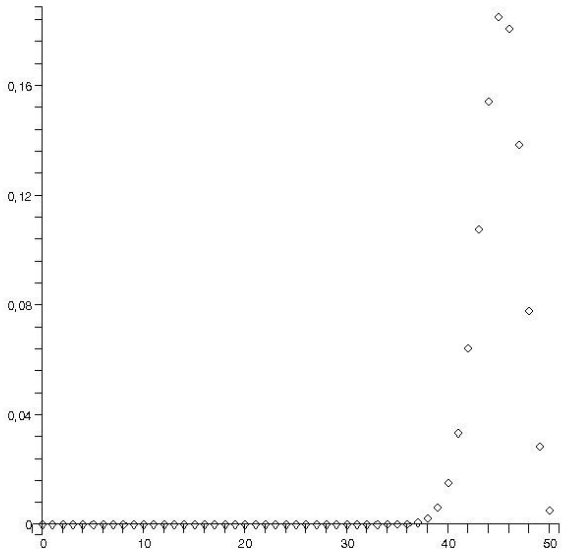
$$f_X(t) = \begin{cases} \binom{n}{t} p^t (1-p)^{1-t} & t \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Binomické rozdělení

Na obrázku jsou pravděpodobnostní funkce pro $\mathrm{Bi}(50, 0.2)$, $\mathrm{Bi}(50, 0.5)$ a $\mathrm{Bi}(50, 0.9)$. Rozdělení pravděpodobnosti dobře odpovídá intuici, že nejvíce výsledků bude blízko u hodnoty np:







Binomické rozdělení

S binomickým rozdělením se potkáváme velice často v praktických úlohách. Jednou z nich je popis náhodné veličiny, která popisuje počet X předmětů v jedné zvolené přihrádek z n možných, do nichž jsme náhodně rozdělili r předmětů. Umístění kteréhokoliv předmětu do pevně zvolené přihrádky má pravděpodobnost $1/n$ (každá z nich je stejně pravděpodobná). Zjevně tedy bude pro jakýkoliv počet $k = 0, \ldots, r$

$$P(X = k) = \binom{r}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r-k} = \binom{r}{k} \frac{(n-1)^{r-k}}{n^r},$$

jde proto o rozložení X typu $\mathrm{Bi}(r, 1/n)$.

Binomické $\longrightarrow$ Poissonovo rozdělení

Jestliže nám bude vzrůstat počet přihrádek n společně s počtem předmětů r_n tak, že v průměru nám na každou přihrádku bude připadat (přibližně) stejný počet prvků λ, můžeme dobře vyjádřit chování našeho rozdělení veličin X_n při limitním přechodu $n \to \infty$. Takovéto chování popisuje např. fyzikální soustavy s velikým počtem molekul plynu. Standardní úpravy vedou při $\lim_{n\to\infty} r_n/n = \lambda$ k výsledku:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) &= \lim_{n\to\infty} \binom{r_n}{k} \frac{(n-1)^{r_n-k}}{n^{r_n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{r_n(r_n-1)\dots(r_n-k+1)}{(n-1)^k} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{r_n} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-\frac{r_n}{n}}{r_n}\right)^{r_n} = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}
\end{aligned}$$

protože obecně funkce $(1+x/n)^n$ konvergují stejnoměrně k funkci e^x na každém omezeném intervalu v $\mathbb{R}$.

Poissonovo rozdělení Po(λ)

Poissonovo rozdělení popisuje náhodné veličiny s pravděpodobnostní funkcí

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} & t \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jak jsme odvodili výše, toto diskrétní rozdělení (rozložené do nekonečně mnoha bodů) dobře aproximuje binomická rozdělení Bi($n, \lambda/n$) pro konstantní $\lambda > 0$ a veliká n.
Snadno ověříme

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) = \sum_{k} \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda+\lambda} = 1.$$

Poissonovo rozdělení

Dobře modeluje výskyt jevů:

- s očekávanou konstantní hustotou na jednotku objemu – např. bakterie ve vzorku (popis očekávaného výskytu k bakterií při rozdělení vzorku na n stejných částí)
- rozdělení událostí, které se vyskytují náhodně v čase a bez závislosti na předchozí historii – v praxi jsou takové procesy často spojeny s poruchovostí strujů a zařízení

Geometrické rozdělení má náhodná veličina $X \sim \mathrm{Ge}(p)$, která udává celkový počet *nezdarů*, které v posloupnosti opakovaných pokusů předcházejí prvnímu *zdaru*, přičemž pravděpodobnost úspěchu v každém pokusu je rovna p .

$$f_X(t) = \begin{cases} (1-p)^t \cdot p & \text{pro } t = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Hypergeometrické rozdělení. Mějme N předmětů, z nichž právě M má danou vlastnost. Z těchto N předmětů náhodně vybereme n předmětů bez vracení. Náhodná veličina $X \sim \mathrm{Hg}(N, M, n)$ udává počet vybraných prvků s danou vlastností. Zřejmě tato náhodná velišina může nabývat pouze celočíselných hodnot z intervalu $[\max\{0, M - N + n\}, \min\{n, M\}]$. Pro t z tohoto intervalu pak

$$f_X(t) = \frac{\binom{M}{t}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}.$$

Rovnoměrné spojité rozdělení Rs(a, b) je nejjednoduším příkladem spojitého rozdělení. Ilustruje, že při jednoduše formulovaném požadavku na chování rozdělení nám nezbude moc prostoru pro jeho definici. Nyní chceme, aby pravděpodobnost každé hodnoty v předem daném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ byla stejná, tj. hustota f_X našeho rozdělení náhodné veličiny X má být konstantní. Pak ovšem jsou pro libovolná reálná čísla $-\infty < a < b < \infty$ jen jediné možné hodnoty

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ \frac{1}{b-a} & t \in (a, b) \\ 0 & t \geq b, \end{cases} \qquad F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & t \in (a, b) \\ 1 & t \geq b. \end{cases}$$

Exponenciální rozdělení $\mathrm{ex}(\lambda)$ je dalším rozdělením, které je snadno určeno požadovanými vlastnostmi náhodné veličiny. Předpokládejme, že sledujeme náhodný jev, jehož výskyty v nepřekrývajících se časových intervalech jsou nezávislé. Je-li tedy $P(t)$ pravděpodobnost, že jev nenastane během intervalu délky t, pak nutně $P(t+s) = P(t)P(s)$ pro všechna $t, s > 0$. Předpokládejme navíc diferencovatelnost funkce P a $P(0) = 1$. Pak jistě $\ln P(t+s) = \ln P(t) + \ln P(s)$, takže limitním přechodem

$$\lim_{s \to 0_+} \frac{\ln P(t+s) - \ln P(t)}{s} = (\ln P)'_+(0).$$

Označme si spočtenou derivaci zprava v nule jako $-\lambda \in \mathbb{R}$. Pak tedy pro $P(t)$ platí $\ln P(t) = -\lambda t + C$ a počáteční podmínka dává jediné řešení

$$P(t) = e^{-\lambda t}.$$

Všimněme si, že z definice našich objektů vyplývá, že $\lambda > 0$.

Nyní uvažme náhodnou veličinu X udávající (náhodný) okamžik, kdy náš jev poprvé nastane. Zřejmě tedy je distribuční funkce rozdělení pro X dána

$$F_X(t) = 1 - P(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

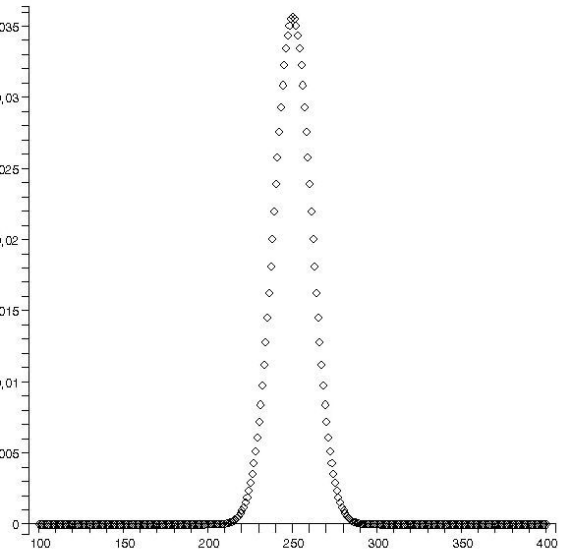
Je vidět, že skutečně jde rostoucí funkci s hodnotami mezi nulou a jedničkou a správnými limitami v $\pm\infty$.
Hustotu tohoto rozdělení dostaneme derivováním distribuční funkce, tj.

$$f_X = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

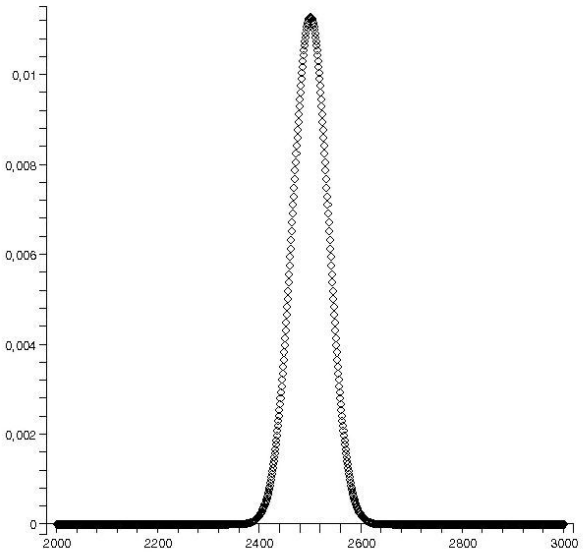
Normální rozdělení

Jde o nejdůležitější rozdělení. Uveďme nejprve motivaci pro jeho zavedení.

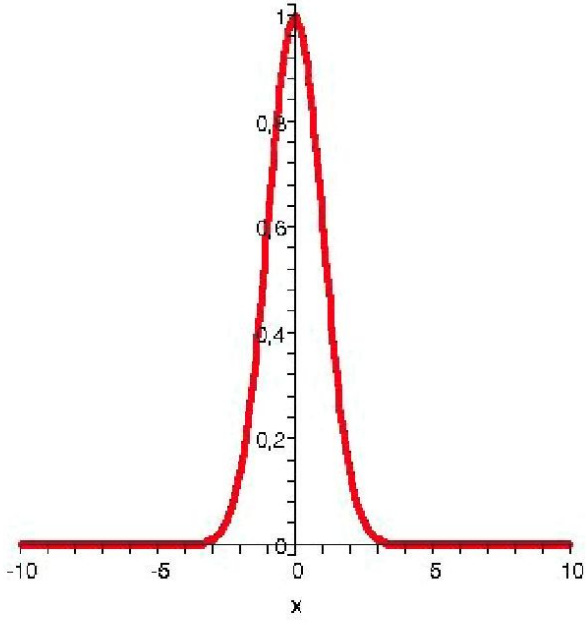
Pokud budeme v **binomickém rozdělení** Bi(n, p) zvyšovat n při zachování úspěšnosti p, bude mít pravděpodobnostní funkce pořád přibližně stejný tvar.



Bi(500, 0.5)



Bi(5000, 0.5)



graf funkce $e^{-x^2/2}$

Normální rozdělení $N(0,1)$

Vzhledem k uvedené motivaci se nabízí hledat vhodné spojité rozdělení, které by mělo hustotu danou nějakou obdobnou funkcí. Protože je $\mathrm{e}^{-x^2/2}$ vždy kladná funkce, potřebovali bychom spočíst $\int_a^b \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx$ což není pomocí elementárních funkcí možné. Je však možné (i když ne úplně snadné) ověřit, že příslušný nevlastní integrál konverguje k hodnotě

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

Odtud vyplývá, že možná hustota rozdělení náhodného rozdělení může být

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Rozdělení s touto hustotou se nazývá **normální rozdělení** $\mathrm{N}(0,1)$.

Normální rozdělení $N(0,1)$

Příslušnou distribuční funkci

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx$$

nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, přesto se s ní numericky běžně počítá (pomocí tabulek nebo softwarových aplikací).
Hustotě f_X se také často říká **Gaussova křivka**.
Abychom uměli pořádněji sformulovat asymptotickou blízkost normáního a binomického rozdělení pro $n \to \infty$, musíme si vytvořit další nástroje pro práci s náhodnými veličinami. Budeme k tomu používat funkce dvojím různým způsobem.

Příklad

Nechť veličina náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0, r \rangle$. Určete distribuční funkci a hustotu pravděpodobnosti rozdělení objemu koule o poloměru X.

Řešení

Určeme nejprve distribuční funkci F (pro $0 < d < \frac{4}{3}\pi r^3$)

$$F(d) = P\left[\frac{4}{3}\pi X^3 \leq d\right] = P\left[X \leq \sqrt[3]{\frac{3d}{4\pi}}\right] = \frac{\sqrt[3]{\frac{3d}{4\pi}}}{r},$$

celkem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \leq 0 \\ \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi r^3}}\, x^{\frac{1}{3}} & \text{pro} \quad 0 < x < \frac{4}{3}\pi r^3 \\ 1 & \text{pro} \quad x \geq \frac{4}{3}\pi r^3 \end{cases}$$

Derivováním pak obdržíme hustotu pravděpodobnosti.