

1. zápočtová písemka
Matematika IV, jaro 2008, skupina B

Jméno, UČO:.....

1.	2.	3.	4.	5.	6.	celkem

Příklad 1. (6 bodů: +1 za správnou odpověď, -1 za špatnou odpověď, 0 bez odpovědi, lze získat pouze nezáporný počet bodů)

Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ANO** nebo **NE** na příslušném řádku), zda jsou následující tvrzení pravdivá:

1. ANO NE Každá podgrupa komutativní grupy je komutativní.
2. ANO NE Existuje komutativní grupa, která má 2008 prvků.
3. ANO NE Je-li H libovolný podgrupoid grupoidu G , potom je i G podgrupoid grupoidu H .
4. ANO NE V libovolné grupě G platí, že libovolný prvek grupy G a prvek k němu inverzní jsou vždy různé.
5. ANO NE Mezi každými dvěma grupami existuje právě jeden isomorfismus.
6. ANO NE Každý obor integrity je tělesem.

Příklad 2. (4 body, 1 bod za každou část)

1. Uveďte příklad konečné nekomutativní grupy.
2. Uveďte příklad homomorfismu $f : (\mathbb{Z}_6, +) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$
3. Uveďte příklad nekonečného oboru integrity.
4. Uveďte příklad polynomu třetího stupně nad reálnými čísly, který nemá reálný kořen.

Příklad 3. (5 bodů)

Nechť $s, t \in \mathbb{S}_6$, $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Napište permutace s a t jako součin nezávislých cyklů,
2. Rozložte permutaci $s \circ t$ na součin nezávislých cyklů,
3. Rozložte permutaci s^{-1} na součin nezávislých cyklů,
4. Rozložte permutaci $(s^{126} \circ t^{-3})^{45}$ na součin nezávislých cyklů,
5. Rozložte permutaci t na součin transpozic a určete paritu této permutace.

Příklad 4. (5 bodů)

Nechť je dána množina G všech nezáporných racionálních čísel, tj. $G = \mathbb{Q}_0^+$. Na této množině je definována operace \star takto: $a \star b = a + b + a \cdot b$, pro libovolná $a, b \in G$. Rozhodněte, zda (G, \star) tvoří grupoid, pologrupu, pologrupu s neutrálním prvkem (tj. monoid), grupu a zda je operace \star komutativní.

Příklad 5. (5 bodů)

Určete $[19]_{71}^{-1}$, tj. inverzní prvek k prvku $[19]_{71}$ v grupě $(\mathbb{Z}_{71}^*, \cdot)$.

Příklad 6. (5 bodů)

Určete všechny racionální kořeny polynomu $f : x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 \in \mathbb{Z}[x]$. Rozložte daný polynom na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Hodně štěstí!