

1. zápočtová písemka
Matematika IV, jaro 2008, skupina C

Jméno, UČO:.....

1.	2.	3.	4.	5.	6.	celkem

Příklad 1. (6 bodů: +1 za správnou odpověď, -1 za špatnou odpověď, 0 bez odpovědi, lze získat pouze nezáporný počet bodů)

Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ANO** nebo **NE** na patřičném řádku), zda jsou následující tvrzení pravdivá:

1. ANO NE Každá podgrupa konečné grupy je konečná.
2. ANO NE Složením libovolných dvou lichých permutací je lichá permutace.
3. ANO NE Součinem dvou cyklických grup je opět cyklická grupa.
4. ANO NE Každý homomorfismus je injektivní.
5. ANO NE V každém okruhu existují dělitelé nuly.
6. ANO NE Libovolný polynom lichého stupně s reálnými koeficienty má reálný kořen.

Příklad 2. (4 body, 1 bod za každou část)

1. Uveďte příklad nekonečného grupoidu.
2. Uveďte příklad jednoprvkové podgrupy grupy $(\mathbb{Z}, +)$
3. Uveďte příklad nekonečného oboru integrity, který není tělesem.
4. Uveďte příklad polynomu pátého stupně s celočíselnými koeficienty, který nemá racionální kořeny, přesto není v $\mathbb{Z}[x]$ ireducibilní.

Příklad 3. (5 bodů)

Nechť $s, t \in \mathbb{S}_6$, $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Napište permutace s a t jako součin nezávislých cyklů,
2. Rozložte permutaci $s \circ t$ na součin nezávislých cyklů,
3. Rozložte permutaci s^{-1} na součin nezávislých cyklů,
4. Rozložte permutaci $(s^{142} \circ t^{-7})^{41}$ na součin nezávislých cyklů,
5. Rozložte permutaci t na součin transpozic a určete paritu této permutace.

Příklad 4. (5 bodů)

Určete řády všech prvků grupy (\mathbb{Z}_7^*, \cdot) a vyberte generátory této grupy.

Příklad 5. (5 bodů)

Nechť je dána množina G všech celých čísel, tj. $G = \mathbb{Z}$. Na této množině je definována operace \star takto: $a \star b = 1 + a + b$, pro libovolná $a, b \in G$. Rozhodněte, zda (G, \star) tvoří grupoid, pologrupu, pologrupu s neutrálním prvkem (tj. monoid), grupu a zda je operace \star komutativní.

Příklad 6. (5 bodů)

Určete všechny kořeny polynomu $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má kořen $1 + i$. Rozložte daný polynom na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Hodně štěstí!