

1. zápočtová písemka
Matematika IV, jaro 2008, skupina D

Jméno, UČO:.....

1.	2.	3.	4.	5.	6.	celkem

Příklad 1. (6 bodů: +1 za správnou odpověď, -1 za špatnou odpověď, 0 bez odpovědi, lze získat pouze nezáporný počet bodů)

Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ANO** nebo **NE** na patřičném řádku), zda jsou následující tvrzení pravdivá:

1. ANO NE Každá podgrupa nekonečné grupy je nekonečná.
2. ANO NE Složením libovolných dvou sudých permutací je sudá permutace.
3. ANO NE Součinem dvou komutativních grup je opět komutativní grupa.
4. ANO NE Každý homomorfismus je surjektivní.
5. ANO NE V každém tělese neexistují dělitelé nuly.
6. ANO NE Libovolný polynom sudého stupně s reálnými koeficienty má reálný kořen.

Příklad 2. (4 body, 1 bod za každou část)

1. Uveďte příklad konečného grupoidu.
2. Uveďte příklad dvouprvkové podgrupy grupy $(\mathbb{Z}, +)$.
3. Uveďte příklad konečného tělesa.
4. Uveďte příklad polynomu pátého stupně s celočíselnými koeficienty, který je v $\mathbb{Z}[x]$ ireducibilní.

Příklad 3. (5 bodů)

Nechť $s, t \in \mathbb{S}_6$, $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Napište permutace s a t jako součin nezávislých cyklů,
2. Rozložte permutaci $s \circ t$ na součin nezávislých cyklů,
3. Rozložte permutaci s^{-1} na součin nezávislých cyklů,
4. Rozložte permutaci $(s^{132} \circ t^{-7})^{41}$ na součin nezávislých cyklů,
5. Rozložte permutaci t na součin transpozic a určete paritu této permutace.

Příklad 4. (5 bodů)

Určete řády všech prvků grupy $(\mathbb{Z}_8, +)$ a vyberte generátory této grupy.

Příklad 5. (5 bodů)

Nechť je dána množina G všech celých čísel, tj. $G = \mathbb{Z}$. Na této množině je definována operace \star takto: $a \star b = a + b - 1$, pro libovolná $a, b \in G$. Rozhodněte, zda (G, \star) tvoří grupoid, pologrupu, pologrupu s neutrálním prvkem (tj. monoid), grupu a zda je operace \star komutativní.

Příklad 6. (5 bodů)

Určete všechny kořeny polynomu $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má kořen $1 + 2i$. Rozložte daný polynom na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Hodně štěstí!