

1. zápočtová písemka
Matematika IV, jaro 2008, skupina F

Jméno, UČO:.....

1.	2.	3.	4.	5.	6.	celkem

Příklad 1. (6 bodů: +1 za správnou odpověď, -1 za špatnou odpověď, 0 bez odpovědi, lze získat pouze nezáporný počet bodů)

Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ANO** nebo **NE** na příslušném řádku), zda jsou následující tvrzení pravdivá:

1. ANO NE Složením dvou shodných transpozic dostaneme identitu.
2. ANO NE Každá grupa má alespoň dvě různé podgrupy.
3. ANO NE Součinem konečné a nekonečné grupy je konečná grupa.
4. ANO NE Každé bijektivní zobrazení je izomorfismem.
5. ANO NE Každý polynom s racionálními koeficienty má alespoň jeden celočíselný kořen.
6. ANO NE Faktorgrupa nekomutativní grupy podle její jednoprvkové podgrupy je nekomutativní.

Příklad 2. (4 body, 1 bod za každou část)

1. Uveďte příklad prvku v pologrupě (\mathbb{Z}_8, \cdot) , který má inverzní prvek.
2. Uveďte příklad čtyřprvkové podgrupy grupy $(\mathbb{Z}_{2008}, +)$
3. Uveďte příklad grupy, která není cyklická.
4. Uveďte příklad nekonečného tělesa.

Příklad 3. (5 bodů)

Nechť $s, t \in \mathbb{S}_6$, $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 7 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Napište permutace s a t jako součin nezávislých cyklů,
2. Rozložte permutaci $s \circ t$ na součin nezávislých cyklů,
3. Rozložte permutaci s^{-1} na součin nezávislých cyklů,
4. Rozložte permutaci $(s^{132} \circ t^{-7})^{41}$ na součin nezávislých cyklů,
5. Rozložte permutaci t na součin transpozic a určete paritu této permutace.

Příklad 4. (5 bodů)

Nechť $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_{15}, +)$ dané předpisem $f(a) = [5 \cdot a]_{15}$. Rozhodněte, zda předpis f zadává zobrazení, homomorfismus, izomorfismus, nalezněte jádro a obraz f .

Příklad 5. (5 bodů) Rozhodněte, zda množina $H = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ tvoří podokruh okruhu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Příklad 6. (5 bodů)

Určete všechny kořeny a jejich násobnost polynomu $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x - 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$.

Hodně štěstí!