

1. zápočtová písemka
Matematika IV, jaro 2008, skupina M

Jméno, UČO:.....

1.	2.	3.	4.	5.	6.	celkem

Příklad 1. (6 bodů: +1 za správnou odpověď, -1 za špatnou odpověď, 0 bez odpovědi, lze získat pouze nezáporný počet bodů)

Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ANO** nebo **NE** na příslušném řádku), zda jsou následující tvrzení pravdivá:

1. ANO NE Je-li H podgrupa grupy G a K podgrupa grupy H , potom je G podgrupa grupy K .
2. ANO NE Každá nekomutativní grupa je konečná.
3. ANO NE Každý nekonečný obor integrity je těleso.
4. ANO NE Libovolné dvě konečné nekomutativní grupy jsou izomorfní.
5. ANO NE Má-li libovolný normovaný polynom s celočíselnými koeficienty reálný kořen, potom je tento kořen racionální.
6. ANO NE Existuje nekonečně mnoho polynomů s celočíselnými koeficienty a trojnásobným kořenem 5.

Příklad 2. (4 body, 1 bod za každou část)

1. Uveďte příklad konečné grupy a její nekonečné podgrupy.
2. Uveďte příklad dvou nekonečných grup, které nejsou izomorfní.
3. Uveďte příklad konečného oboru integrity.
4. Uveďte příklad polynomu druhého stupně s celočíselnými koeficienty, který nemá reálný kořen.

Příklad 3. (5 bodů)

Nechť $s, t \in \mathbb{S}_6$, $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 7 & 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Napište permutace s a t jako součin nezávislých cyklů,
2. Rozložte permutaci $s \circ t$ na součin nezávislých cyklů,
3. Rozložte permutaci s^{-1} na součin nezávislých cyklů,
4. Rozložte permutaci $(s^{144} \circ t^{-7})^{48}$ na součin nezávislých cyklů,
5. Rozložte permutaci t na součin transpozic a určete paritu této permutace.

Příklad 4. (5 bodů)

Nechť $f : (\mathbb{Z}_{10}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_{30}, +)$ dané předpisem $f(a) = [3 \cdot a]_{30}$. Rozhodněte, zda předpis f zadává zobrazení, homomorfismus, izomorfismus, nalezněte jádro a obraz f .

Příklad 5. (5 bodů) Určete řády všech prvků grupy $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2, +)$. Vyberte generátory této grupy.

Příklad 6. (5 bodů)

Určete všechny racionální kořeny a jejich násobnost polynomu $f(x) = 18x^4 - 15x^3 - 7x^2 + 3x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$.

Hodně štěstí!