Matematika 4 $\boxed{\textbf{A}}$
26. června 2008 (UČO:)

Hodnocení:

Bonus	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně bonusu**) je **15 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 bod: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano — ne** Každá normální podgrupa dané grupy je nutně komutativní.

(b) **ano — ne** Pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$ platí $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$ (φ označuje Eulerovu funkci).

(c) **ano — ne** Okruh polynomů nad oborem integrity je oborem integrity.

(d) **ano — ne** Každá lichá permutace je transpozicí.

(e) **ano — ne** Pravděpodobnost, že při čtyřech hodech běžnou kostkou padnou čtyři různá čísla, je větší než $\frac{1}{4}$.

(f) **ano — ne** Hustota libovolné spojité náhodné veličiny je monotónní funkce.

Příklady:

1. Jistý výrobce úsporných automobilů tvrdí, že jeho výrobky ujedou na 1 litr benzínu 31 km. Byl vybrán vzorek 6 aut, u kterých se zjistilo, že průměrně dojela 29,5 km s (výběrovou) směrodatnou odchylkou 3 km. Co je možné říci o tvrzení výrobce (je možné tvrzení zamítnout nebo jsme nuceni jej připustit) na hladině významnosti 0,05? Nulovou hypotézu $\mu = 31$ testujte oproti jednostranné alternativě $\mu < 31$.

2. Určete konstantu c tak, aby byla funkce

$$\varphi(x) = \begin{cases} cx^2(1-x) & \text{pro } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

hustotou pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny X. Najděte její distribuční funkci a vypočtěte pravděpodobnost, že realizace X bude ležet mezi hodnotami 0,2 a 0,8.

3. (a) Uvažme zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$ definované předpisem $f(a+bi) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$. Rozhodněte (a zdůvodněte), je-li f homomorfismus okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ do okruhu $(\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ matic typu 2x2 nad $\mathbb{R}$.

(b) Uvažme zobrazení $g : \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ definované předpisem $g\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = ad - bc$. Rozhodněte (a zdůvodněte), je-li g homomorfismus okruhu $(\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{Q}), +, \cdot)$ matic typu 2x2 nad $\mathbb{Q}$ do okruhu $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

4. Najděte všechny kořeny polynomu $x^4 + 4x^2 - x + 6 \in \mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost, víte-li, že jedním z kořenů je $\frac{-1+i\sqrt{11}}{2}$.

Nápověda:

$X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:
$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$
$U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$
$T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$
$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$
$\sum(X_i-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$
$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$
je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,
kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$
$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_*\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení:

$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u), \Phi(0,05) \approx 0,52, \Phi(1,65) \approx 0,95, \Phi(1,96) \approx 0,975.$

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,95	0,975
1	0,001	0,004	3,841	5,024
2	0,051	0,103	5,991	7,378
3	0,216	0,352	7,815	9,348
5	0,831	1,145	11,070	12,833
10	3,247	3,940	18,307	20,483
20	9,591	10,851	31,410	34,710
50	32,357	34,764	67,505	71,420
100	74,222	77,929	124,342	129,561

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600

Matematika 4 $\boxed{\text{B}}$
26. června 2008 (UČO:)

Hodnocení:

Bonus	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně bonusu**) je **15 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano — ne** Pro polynomy nad libovolným okruhem platí, že stupeň součinu dvou polynomů je součtem stupňů těchto polynomů.

(b) **ano — ne** Existuje nekonečně mnoho grup, které jsou po dvou neizomorfní a přitom má každá právě 2 podgrupy.

(c) **ano — ne** Neexistuje žádný surjektivní homomorfismus $(Z_{30}, +) \to (Z_6, +)$.

(d) **ano — ne** Injektivní homomorfismus okruhů ma jednoprvkové jádro.

(e) **ano — ne** Pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padl součet menší než 7, víme-li, že součet byl lichý, je větší než 1/3.

(f) **ano — ne** Funkce $F(x) = \frac{x}{x+1}$ pro $x \geq 0$ a nulová pro $x < 0$ je distibuční funkce.

Příklady:

1. Volejbalový trenér tvrdí, že volejbalistky mají větší objem plic než průměr ženské populace stejné věkové skupiny, který činí 3,4 litru. Během tréninkového kempu byla uskutečněna měření s následujícími výsledky:

$$3,4 \quad 3,6 \quad 3,8 \quad 3,3 \quad 3,4 \quad 3,5 \quad 3,7 \quad 3,6 \quad 3,7 \quad 3,4 \quad 3,6.$$

Se spolehlivostí 95% rozhodněte, zda je tvrzení trenéra opodstatněné (tj. testujte nulovou hypotézu oproti jím zmiňované jednostranné alternativě). Sestrojte příslušný jednostranný interval spolehlivosti a pro porovnání i 95% oboustranný interval spolehlivosti.

2. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0, r \rangle$. Určete distribuční funkci a hustotu pravděpodobnosti rozdělení objemu koule o poloměru X.

3. Uvažte grupu $(\mathbb{Z}_{221}^{\times}, \cdot)$ invertibilních zbytkových tříd modulo složené číslo 221. Určete

(a) řád grupy,

(b) inverzní prvek k $[5]_{221}$,

(c) řád prvku $[5]_{221}$ (Nápověda: určete řád 5 modulo prvočísla dělící 221 a odtud odvoďte řád modulo 221).

4. Určete všechny kořeny polynomu $8x^6 - 12x^5 + 10x^4 - 9x^3 + 13x^2 - 9x + 2 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $\frac{1}{2}$ a jednoduchý kořen $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Nápověda:

$X_1,\dots,X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:

$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M)=\mu$, $D(M)=\sigma^2/n$, $M\sim N(\mu,\sigma^2/n)$

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2)=\sigma^2$

$U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$

$T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$

$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$

$\sum (X_i-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$

$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n})$

je-li $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, pak $K=(m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,

kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2)/(m+n-2)$

$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1,n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1-\mu_2$ (známe σ_1^2,σ_2^2)	$M_1-M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1-\mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2=\sigma_2^2$)	$M_1-M_2 \pm S_*\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení:

$\Phi(-u) = 1-\Phi(u), \Phi(0,05)\approx 0,52, \Phi(1,65)\approx 0,95, \Phi(1,96)\approx 0,975.$

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,95	0,975
1	0,001	0,004	3,841	5,024
2	0,051	0,103	5,991	7,378
3	0,216	0,352	7,815	9,348
5	0,831	1,145	11,070	12,833
10	3,247	3,940	18,307	20,483
20	9,591	10,851	31,410	34,710
50	32,357	34,764	67,505	71,420
100	74,222	77,929	124,342	129,561

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600